



VERSUCH 19

PRISMEN- UND GITTERSPEKTROMETER

Praktikant:

Tobias Wegener

Christian Gass

Alexander Osterkorn

E-Mail:

tobias.wegener@stud.uni-goettingen.de

christian.gass@stud.uni-goettingen.de

a.osterkorn@stud.uni-goettingen.de

Tutor:

Danny Schwarzbach

Gruppe:

6

Durchgeführt am:

4.3.2014

Protokoll abgegeben:

12.3.2014

Testiert:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Theorie	2
2.1	Prismenspektrometer	2
2.2	Gitterspektrometer	4
3	Durchführung	5
3.1	Das Prismenspektrometer	5
3.2	Das Gitterspektrometer	7
4	Auswertung	8
4.1	Das Prismenspektrometer	8
4.1.1	Bestimmung der Winkeldifferenzen und Dispersion . .	8
4.1.2	Bestimmung des Spaltdurchmessers	10
4.1.3	Bestimmung des Auflösungsvermögens	11
4.1.4	Bestimmung des maximal erreichbaren Auflösungsvermögens	12
4.2	Das Gitterspektrometer	12
4.2.1	Berechnung der Ablenkungswinkel	12
4.2.2	Bestimmung der Gitterkonstanten	12
4.2.3	Bestimmung der Differenz der gelben Wellenlängen . .	13
4.2.4	Auflösungsvermögen	14
4.2.5	Wellenlänge der violetten Linie	14
5	Diskussion	16
5.1	Das Prismenspektrometer	16
5.2	Gitterspektrometer	17
5.3	Vergleich der Auflösungsvermögen	18

1 Einleitung

In diesem Versuch wollen wir verschiedene Spektrometer untersuchen. Ein Spektrometer ist in der Lage, die Frequenzen eines ankommenden Lichtbündels aufzuspalten und ermöglicht so eine Untersuchung der im Licht enthaltenen Frequenzkomponenten. Verschiedene Spektrometer realisieren dies auf unterschiedliche Weisen, im Normalfall werden Interferenz- und Beugungseigenschaften des Lichtes ausgenutzt, um die gewünschte Aufspaltung des Spektrums zu erreichen. Wir betrachten in diesem Experiment ein Prismenspektrometer und auch ein Gitterspektrometer und wollen deren Funktionsweise besser verstehen.

2 Theorie

2.1 Prismenspektrometer

Brechung und Dispersion Um die Funktionsweise eines Prismenspektrometers zu verstehen, muss man *Brechung* und *Dispersion* in Materie untersuchen. Geht ein Lichtstrahl von einem Medium 1 mit Brechungsindex n_1 in ein Medium 2 mit anderem Brechungsindex n_2 über, so wird dieser Lichtstrahl gebrochen. Dieser Vorgang gehorcht dem SNELLIUSSchen Brechungsgesetz ([?, S. 233])

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2. \quad (1)$$

Hier bezeichnen α_1 und α_2 die Winkel zum Lot der Grenzfläche in Medium 1 bzw. Medium 2. Der Brechungsindex ist allerdings nicht nur von den Eigenschaften des Mediums, sondern auch von der Wellenlänge λ des Lichtes abhängig. Diese Abhängigkeit bezeichnet man als *Dispersion*. Sie ist definiert als die Änderung $\frac{dn}{d\lambda}$ des Brechungsindex bei Änderung der Wellenlänge.

Kohärentes Licht Um Beugungs- und Interferenzphänomene beobachten zu können, wird kohärentes Licht benötigt, d.h. Licht, bei dem die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ zwischen zwei Teilwellen klein ist (mindestens $\Delta\varphi \leq 2\pi$). Hierzu kann man eine Linse-Spalt-Linse-Konstruktion verwenden. Die Spaltbreite wird möglichst klein gehalten und der Spalt wird so zwischen den beiden Linsen platziert, dass er im Fokus von beiden steht. Nach dem HUYGENSSchen Prinzip entstehen im Spalt, wo das Licht von der ersten Linse theoretisch in einem Punkt fokussiert wird, Elementarwellen, die offensichtlich kohärent sind. Da der Spalt im Fokus der zweiten Linse steht, sind die Strahlen nach dem Durchlaufen der zweiten Linse parallel.

Prismenspektrometer Trifft paralleles kohärentes Licht auf ein Prisma, so werden die darin enthaltenen Wellenlängen wegen Dispersion unterschiedlich stark gebrochen. Die Seiten eines Prismas sind dabei die Basis S und zwei brechende Flächen, die die sich in der sog. brechenden Kante schneiden. In der Regel trifft Licht auf eine brechende Fläche, wird dort gebrochen, durchläuft das Prisma und wird beim Austritt an der zweiten brechenden Fläche erneut gebrochen. Ein solcher Vorgang ist in Abbildung 1 a) skizziert. Wir wollen schauen, wie der Ablenkungswinkel δ des gesamten Prismas von der Wellenlänge abhängt. Wir haben nach der Kettenregel:

$$D := \frac{d\delta}{d\lambda} = \left(\frac{dn}{d\delta} \right)^{-1} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \quad (2)$$

Der zweite Faktor ist die Dispersion, den ersten wollen wir genauer untersuchen. Bezeichnen wir mit ε den Winkel an der brechenden Kante, so ergibt sich nach [?, S.308ff.] bei einem Prisma mit Brechungsindex n in Luft ($n_{\text{Luft}} \approx 1$) die FRAUNHOFER-Formel mit dem minimalen Ablenkwinkel δ_{\min} :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{\min} + \varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \quad (3)$$

Man kann mit 1 und Winkelsummenbetrachtungen nachrechnen, dass dann der Strahlengang im Prisma symmetrisch ist. Allerdings werden auch bei einem sehr kleinen, monochromatischen Strahl Beugungsphänomene wahrgenommen, wenn er durch ein Prisma propagiert. Es handelt sich hier also nicht um ein rein geometrisch zu betrachtendes Phänomen. Deshalb ist es an dieser Stelle sinnvoll, das Auflösungsvermögen A zu definieren (gemäß [?, S. 366ff.]):

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = |D \cdot d| = 2d \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\delta_{\min} + \varepsilon}{2}\right)} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \right|, \quad (4)$$

wobei d die Breite des Spaltes hinter dem Prisma bezeichnet, hinter welchem man die Beugung beobachtet. Das Auflösungsvermögen impliziert, dass man zwei Wellenlängen als gerade noch aufgelöst ansieht, wenn das k -te Maximum des Lichtes mit λ im benachbarten Minimum des Lichtes mit $\lambda + \Delta\lambda$ liegt. Führt man nun die effektive Basislänge B wie in Abbildung 1 b) skizziert ein, so erhält man durch geometrische Überlegungen

$$A = B \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| \quad (5)$$

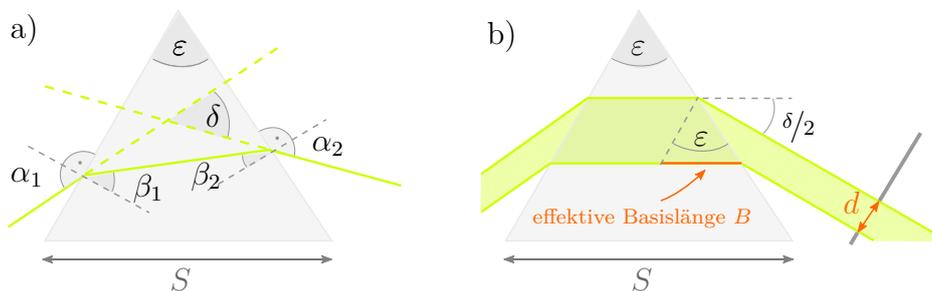


Abbildung 1: Brechung am Prisma

2.2 Gitterspektrometer

Das Gitterspektrometer funktioniert mithilfe von Beugungs- und Interferenzphänomenen. Um solche erzeugen zu können, wird kohärentes Licht benötigt. In einen Strahlengang aus parallelem kohärentem Licht wird ein Gitter eingespannt, an welchem Licht unterschiedlicher Wellenlänge unterschiedlich stark gebeugt wird. Ist N die Anzahl der beleuchteten Gitterspalte und a die Gitterkonstante, so berechnet sich nach [?, Kap. 10.2.3] die Position des k -ten Hauptmaximums bzw. -minimums für Licht der Wellenlänge λ durch

$$\begin{aligned} a \sin \alpha_{\max} &= k\lambda \\ a \sin \alpha_{\min} &= \frac{k\lambda}{N}, \end{aligned} \quad (6)$$

wobei α der Winkel zwischen der Richtung des Lichtes hinter dem Spalt und dem Lot des Spaltes ist. Der Index steht für Maximum bzw. Minimum. Auch hier kann man das Auflösungsvermögen $A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ analog zu Gl. 4 einführen. Durch Einsetzen der Bedingungen 6 erhalten wir nach einer Kurzen Rechnung:

$$A = kN \quad (7)$$

3 Durchführung

Da teilweise sehr empfindliche Messungen durchgeführt werden, sollte sorgfältig mit den optischen Elementen umgegangen werden. Insbesondere sollte man vermeiden, das Gitter und die Linsen direkt zu berühren.

3.1 Das Prismenspektrometer

In diesem Teil des Versuchs soll das Verhalten von Licht beim Durchgang durch ein Prisma analysiert werden. Dabei sollen alle Versuchsteile für zwei verschiedene Prismen (eins aus Kronglas und eins aus schwerem Flintglas) durchgeführt werden. Die Basislängen der einzelnen Prismen sind zu notieren.

- Zunächst wird das Spektrometer aufgebaut, indem die benötigten optischen Elemente auf einer Schiene angeordnet werden (vgl. Abb. 2). Diese sind:

- Quecksilberdampflampe
- Kondensorlinse
- Beleuchtungsspalt
- Zweite Konkavlinse
- Rotfilter
- Dritte Konkavlinse
- Okular

Außerdem werden die Brennweiten der einzelnen Linsen notiert.

Zwischen der zweiten Linse und dem Rotfilter ist die Schiene unterbro-

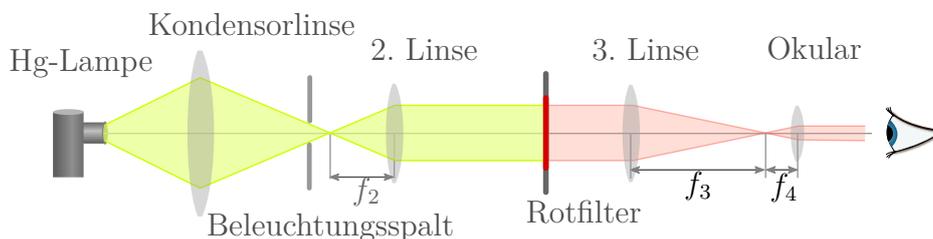


Abbildung 2: Strahlengang ohne Prisma

chen. Der hintere Teil der Schiene wird im Folgenden als Schwenkarm bezeichnet. Die Drehachse befindet sich zwischen der zweiten Linse und dem Rotfilter.

- Die zweite Linse wird so positioniert, dass das Licht nach dieser parallel weiterläuft. Um dies zu überprüfen, kann man mit einer Mattscheibe den Strahldurchmesser in verschiedenen Entfernungen betrachten. Falls dieser konstant ist, handelt es sich um paralleles Licht.
- Die dritte Linse und das Okular werden so relativ zueinander positioniert, dass der Beleuchtungsspalt scharf abgebildet wird. Danach werden die Positionen der verschiedenen Objekte über den Maßstab an der Schiene abgelesen (insbesondere der Abstand zwischen dritter Linse und Okular).
- Das Fadenkreuz des Okulars wird so eingestellt, dass es auf die Mitte des durchgehenden Strahls gerichtet ist. Dazu stellt man idealerweise den Winkel des Schwenkarms auf 0° ein und positioniert das Fadenkreuz durch Drehen des Feintriebs am Okular. Danach sind der eingestellte Winkel und der Wert des Millimetertriebs zu notieren.
- Auf der Drehachse befindet sich ein Teller, auf den im Folgenden das Glasprisma gestellt wird. Dieses bricht das Licht in einem bestimmten Winkel, der von der Orientierung des Prismas zum einfallenden Licht abhängt. Das Prisma wird so weit gedreht, bis der Brechwinkel des Lichts minimal wird. Der Rotfilter wird aus dem Aufbau entfernt. Durch Positionierung des Schwenkarms wird die gelbe Linie des Spektrums auf das Fadenkreuz abgebildet. Der dazu eingestellte Winkel wird notiert.
- Durch Drehen des Feintriebes wird der Abstand zwischen der gelben und der grünen Linie bestimmt.

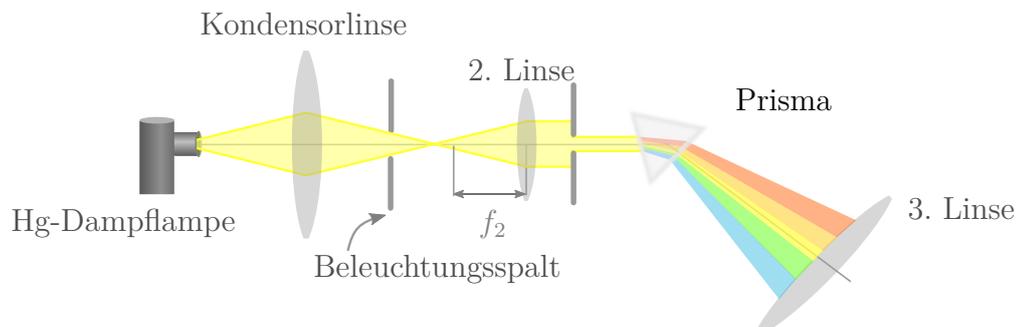


Abbildung 3: Strahlengang mit Prisma

- Nun wird nach der zweiten Linse ein zusätzlicher Spalt eingesetzt (vgl. Abb. 3). Dieser wird so lange verengt, bis die zwei gelben Linien gerade nicht mehr von einander getrennt werden können. An dieser Stelle gab es bei uns Probleme, da selbst bei maximal geöffnetem Spalt die beiden Linien nicht voneinander getrennt werden konnten.

- Danach wird der ersten Spalt durch den so eingestellten zweiten Spalt ersetzt, sodass dessen Breite mit dem Feintrieb bestimmt werden kann. Dazu wird der Rotfilter wieder eingesetzt.

3.2 Das Gitterspektrometer

Wie zu Beginn des ersten Teils wird mit der Lampe, der Kondensorlinse, dem Beleuchtungsspalt und der zweiten Linse paralleles Licht hergestellt (vgl. Abb. 2). Das Prisma wird nun jedoch durch das Gitter ersetzt, wobei dieses möglichst senkrecht zum Strahlengang stehen sollte.

Nun wird für die gelbe, grüne und violette Linie sowie jeweils für die 1., 4. und 8. Ordnung der Brechungswinkel gemessen. Das Gitter wird dabei nicht mitgedreht, da dessen Unterlage nicht direkt mit dem Schwenkarm verbunden ist.

Danach wird für jede dieser Ordnungen die Winkeldifferenz $\Delta\alpha$ zwischen den beiden gelben Linien und $\Delta\beta$ zwischen der gelben und der grünen Linie bestimmt.

Direkt an dem Gitter befindet sich eine Plexiglasführung, in die Spalte von verschiedener Breite geschoben werden können. Nun wird wiederum jeweils für die 1., 4. und 8. Ordnung diejenige Spaltbreite bestimmt, bei der die beiden gelben Linien noch getrennt aufgelöst werden können.

4 Auswertung

4.1 Das Prismenspektrometer

4.1.1 Bestimmung der Winkeldifferenzen und Dispersion

Bei der Justierung des Okular-Fadenkreuzes wurde ein Nullwinkel am Schwenkarm von $\alpha_0 = (-1.6 \pm 0.1)^\circ$ abgelesen. Nach der Justierung des Prismas aus Kronglas auf den minimalen Ablenkwinkel befindet sich die gelbe Linie bei einem Skalenwinkel von $(36.9 \pm 0.1)^\circ$, was einem tatsächlichen Ablenkungswinkel von $\varphi_{\text{gelb}}^K = (38.5 \pm 0.2)^\circ$ entspricht.

Analog war der Feintrieb des Okulars bei der Justierung auf den Strahlmittelpunkt auf $s_0^K = (17.75 \pm 0.02)$ mm eingestellt. Bei gleicher Schwenkar-meinstellung wurde eine Feintriebeinstellung von (17.28 ± 0.02) mm für die grüne Spektrallinie gemessen. Das entspricht einem Streckenunterschied von $\Delta s^K = (0.47 \pm 0.03)$ mm und einem Winkelunterschied von

$$\Delta\varphi^K = \frac{\Delta s^K}{b} = (2.3 \pm 0.2) \cdot 10^{-3} \text{ rad} = (0.13 \pm 0.01)^\circ$$

mit

$$\sigma^2(\Delta\varphi) = \left(\frac{\sigma(\Delta s)}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b \Delta s}{b^2}\right)^2 \quad (8)$$

wobei $b = (22.5 \pm 0.5)$ cm der gemessene Abstand von dritter Linse und Okular ist (bzw. berechnet aus Messung des Skalenwertes von linkem/rechtem Rand).

Die analoge Rechnung für die Messung mit schwerem Flintglas führt auf $\varphi_{\text{gelb}}^F = (60.0 \pm 0.2)^\circ$ und $\Delta s^F = (2.20 \pm 0.03)$ mm.

Damit berechnet sich der Winkelunterschied zwischen gelber und grüner Spektrallinie zu

$$\Delta\varphi^F = (9.8 \pm 0.2) \cdot 10^{-3} \text{ rad} = (0.56 \pm 0.01)^\circ.$$

Aus der Praktikumsanleitung entnimmt man die Wellenlängen der einzelnen Spektrallinien im Quecksilberlicht (in Tab. 1). Da es zwei gelbe Linien gibt, ist nicht klar, welche der beiden die zur Messung verwendete war (oder eine Überlagerung der beiden). Deshalb wird für die Winkeldifferenz der Mittelwert der beiden gelben Linien als Referenz verwendet:

$$\lambda_{\text{gelb}} := \frac{\lambda_3 + \lambda_4}{2} = 578.02 \text{ nm}, \quad \lambda_{\text{grün}} = \lambda_5 = 546.07 \text{ nm}$$

Bei den folgenden Berechnungen scheint die Beschreibung in der Praktikumsanleitung mindestens unscharf zu sein.

	[nm]	Farbe
λ_3	579.07	gelb
λ_4	576.96	gelb
λ_5	546.07	grün
λ_8	407.78	violett
λ_9	404.66	violett

Tabelle 1: Wellenlängen aus der Praktikumsanleitung (Auszug)

Es wird vorgeschlagen, die *Dispersion* als konstant anzunehmen. Dies ist nicht gleichbedeutend mit der Annahme einer konstanten Winkeldispersion nach Glg. 2. Die Abhängigkeit zwischen beiden Dispersionen ist aber auch nicht linear, da δ_{\min} und damit auch $dn/d\lambda$ nach der Fraunhofer-Formel wellenlängenabhängig ist.

Die in der Praktikumsanleitung angegebenen Vergleichswerte für die „Dispersionen“ sind tatsächlich Winkeldispersionen, wie man an der Einheit erkennt. Scheinbar wurde hier eine Unterscheidung der beiden Begriffe nicht sauber vorgenommen. Im Folgenden wird von einer als konstant angenommenen Winkeldispersion ausgegangen:

$$D = \frac{d\delta_{(\min)}}{d\lambda} = \frac{\Delta\delta}{\Delta\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{\lambda_{\text{gelb}} - \lambda_{\text{grün}}} \quad \text{mit} \quad \sigma_D = \frac{\sigma(\Delta\varphi)}{\lambda_{\text{gelb}} - \lambda_{\text{grün}}}$$

Damit berechnet man

$$D^K = (72\,000 \pm 7\,000) \text{ rad m}^{-1} = (4.1 \pm 0.4) \cdot 10^6 \text{ }^\circ \text{ m}^{-1}$$

für Kronglas und

$$D^F = (307\,000 \pm 7\,000) \text{ rad m}^{-1} = (17.6 \pm 0.4) \cdot 10^6 \text{ }^\circ \text{ m}^{-1}$$

für schweres Flintglas. Die Werte stimmen in der Größenordnung mit den Literaturangaben von Tabelle 2 überein, siehe Diskussion.

Mit der Eigenschaft der Ableitung als linearer Näherungsfunktion kann man nun versuchen, den Winkelabstand zwischen den beiden gelben Linien zu berechnen:

$$\Delta\varphi_{\text{gelb}} = \frac{d\delta}{d\lambda}(\lambda_3 - \lambda_4) = D \cdot (\lambda_3 - \lambda_4)$$

mit

$$\sigma(\Delta\varphi_{\text{gelb}}) = \sigma_D \cdot (\lambda_3 - \lambda_4)$$

Material	Winkeldispersion D
Kronglas	$3.47 \cdot 10^6 \text{ }^\circ \text{ m}^{-1}$
schweres Flintglas	$15.0 \cdot 10^6 \text{ }^\circ \text{ m}^{-1}$

Tabelle 2: Vergleichswerte aus der Praktikumsanleitung (Auszug)

Damit folgt jeweils

$$\Delta\varphi_{\text{gelb}}^K = (1.5 \pm 0.2) \cdot 10^{-4} \text{ rad} = (0.0087 \pm 0.0009)^\circ$$

für Kronglas und

$$\Delta\varphi_{\text{gelb}}^F = (6.5 \pm 0.2) \cdot 10^{-4} \text{ rad} = (0.037 \pm 0.001)^\circ$$

für schweres Flintglas.

4.1.2 Bestimmung des Spaltdurchmessers

Zur Messung des Spaltdurchmessers wurde der Spalt nach der Einstellung an die Stelle des Beleuchtungsspalts gesetzt. Das mit dem Okular vermessene Bild des Spaltes wird durch ein Linsensystem aus zweiter und dritter Linse erzeugt. Dabei ist der Spalt genau in der Entfernung einer Linse-2-Brennweite f_2 von Linse 2 entfernt, da paralleles Licht entstehen soll.

Die dritte Linse erzeugt aus dem einfallenden parallelen Licht Brennpunktstrahlen (mit Brennweite f_3). Vermutlich wirkt das Okular dann als Zerstreuungslinse, die aus den Brennpunktstrahlen paralleles Licht macht, die ins Auge des Beobachters fallen.

Das Bild des Spaltes entsteht dann unmittelbar hinter dem Okular, also im Abstand $f_3 - f_{\text{Okular}}$, was dem oben eingeführten und gemessenen Abstand b von dritter Linse und Okular entspricht („Tubuslänge“). Für die Vergrößerung des Linsensystems sollte in diesem Fall (mit Gegenstandsweite = f_2) gelten

$$V = \frac{\text{Bildweite}}{\text{Gegenstandsweite}} = \frac{b}{f_2} = 0.82 \pm 0.02$$

$$\sigma_V = \left(\frac{\sigma_b}{f_2}\right)^2 + \left(\frac{b\sigma_{f_2}}{f_2^2}\right)^2$$

mit oben gemessenem b und einem angegebenen $f_2 = (27.5 \pm 0.3) \text{ cm}$. Die Vergrößerung sollte eigentlich größer als 1 sein.

Mit der Feintriebskala des Okulars wurde die Breite des Spaltes (genauer: des Bildes vom Spalt) mehrfach vermessen, die Mittelwerte sind

$$\tilde{S}^K = (1.89 \pm 0.02) \text{ mm} \quad \text{und} \quad \tilde{S}^F = (3.50 \pm 0.02) \text{ mm}$$

Die wahre Spaltbreite S erhält man über die Vergrößerung mit $\tilde{S} = V \cdot S$, das ergibt

$$S^K = \frac{\tilde{S}^K}{V} = (2.30 \pm 0.06) \text{ mm} \quad \text{und} \quad S^F = \frac{\tilde{S}^F}{V} = (4.3 \pm 0.1) \text{ mm}$$

mit der Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_S^2 = \left(\frac{\sigma_{\tilde{S}}}{V} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{S} \sigma_V}{V^2} \right)^2.$$

4.1.3 Bestimmung des Auflösungsvermögens

Das theoretische Auflösungsvermögen des Prismas berechnet man mit der Glg. 4, wobei hier die beiden gelben Spektrallinien verwendet werden:

$$A_{\text{theo}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_4} \approx 274.4$$

Nach den Glgen. 4 und 5 ist die *effektive Basisbreite* des Prismas gegeben durch

$$B = 2S \frac{\sin(\varepsilon/2)}{\cos((\varphi + \varepsilon)/2)},$$

$$\sigma_B^2 = \left(\frac{2\sigma_S \sin(\varepsilon/2)}{\cos((\varphi + \varepsilon)/2)} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_\varphi S \sin(\varepsilon/2) \sin((\varphi + \varepsilon)/2)}{\cos^2((\varphi + \varepsilon)/2)} \right)^2$$

Dabei ist $\varepsilon = 60^\circ$ der Basiswinkel des Prismas und φ der (hier minimale) Ablenkwinkel (s.o).

Weiter müssen wir die Dispersion berechnen, das geschieht über Formel 2:

$$\frac{dn}{d\lambda} = D \cdot \frac{\partial n}{\partial \delta}$$

$$\sigma \left(\frac{dn}{d\lambda} \right) = \left(\sigma_D \cdot \frac{\partial n}{\partial \delta} \right)^2 + \left(D \cdot \sigma \left(\frac{\partial n}{\partial \delta} \right) \right)^2$$

mit der oben berechneten Winkeldispersion D .

Der zweite Faktor wird mit der Fraunhofer-Formel 3 bestimmt (für $\delta_{\min} = \varphi$):

$$\frac{\partial n}{\partial \delta} = \frac{\cos\left(\frac{\varepsilon + \varphi}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \quad \text{und} \quad \sigma \left(\frac{\partial n}{\partial \delta} \right) = \sigma_\varphi \left| \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon + \varphi}{2}\right)}{4 \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right|$$

Das experimentell ermittelte Auflösungsvermögen folgt aus Glg. 5 mit entsprechender Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_A^2 = \left(\sigma_B \cdot \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| \right)^2 + \left(B \cdot \sigma \left(\frac{dn}{d\lambda} \right) \right)^2.$$

Die jeweiligen Rechenergebnisse können der Tabelle 3 entnommen werden.

4.1.4 Bestimmung des maximal erreichbaren Auflösungsvermögens

Einsetzen der maximalen effektiven Basislänge, also der geometrischen Basislänge in Glg. 5 gibt einen Wert für das maximal mögliche Auflösungsvermögen. Die gemessenen Basislängen sind $B_{\max}^K = (5.0 \pm 0.1)$ cm und $B_{\max}^F = (5.9 \pm 0.1)$ cm. Das ergibt maximale Auflösungsvermögen von

$$A_{\max}^K = 2300 \pm 300 \quad \text{und} \quad A_{\max}^F = 9100 \pm 300.$$

	Kronglas	Flintglas
$\frac{\partial n}{\partial \delta}$	$(0.653 \pm 0.002) \text{ rad}^{-1}$	$(0.500 \pm 0.002) \text{ rad}^{-1}$
$\frac{dn}{d\lambda}$	$(47\,000 \pm 5\,000) \text{ m}^{-1}$	$(154\,000 \pm 4\,000) \text{ m}^{-1}$
B	$(0.0035 \pm 0.0001) \text{ m}$	$(0.0086 \pm 0.0003) \text{ m}$
A	166 ± 20	1320 ± 50

Tabelle 3: Experimentelle Bestimmung des Auflösungsvermögens

4.2 Das Gitterspektrometer

4.2.1 Berechnung der Ablenkungswinkel

Zuerst berechnen wir die tatsächlichen Ablenkungswinkel analog zum Prismenspektrometer. Der Nullwinkel ist hier $\alpha_0 = (-1.5 \pm 0.1)^\circ$. Für zukünftige Rechnungen benutzen wir nur die bereinigten Werte für die Ablenkungswinkel.

4.2.2 Bestimmung der Gitterkonstanten

Betrachten wir nun Gleichung 6. Wir haben in dieser Gleichung die Winkel α_{\max} bestimmt für die erste, vierte und achte Ordnung und für die gelben, grünen und violetten Linien. Die Werte für die Wellenlängen entnehmen wir

Tabelle 1. Dabei benutzen wir für gelb und violett jeweils den Mittelwert der angegebenen Wellenlängen. Durch umformen der Gleichung erhalten wir dann

$$a = \frac{k\lambda}{\sin \alpha}$$

Der Fehler von a ergibt sich mittels Fehlerfortpflanzung dann zu

$$\sigma_a = \sigma_\alpha \left| \frac{k\lambda \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right|.$$

Mit der üblichen Formel berechnen wir dann aus den einzelnen Messwerten für die verschiedenen Beugungsordnungen und die verschiedenen Wellenlängen das gewichtete Mittel. Es folgt:

$$\underline{\underline{a = (9.477 \pm 0.007) \mu\text{m}}}$$

4.2.3 Bestimmung der Differenz der gelben Wellenlängen

Nehmen wir nun wieder die Winkeldispersion als konstant an, so können wir aus den bestimmten Winkeldifferenzen $\Delta\alpha$ zwischen den gelben Linien und $\Delta\beta$ zwischen gelb und grün die Wellenlängendifferenz der beiden gelben Linien berechnen. Einsetzen in Gleichung 2 und Gleichsetzen liefert also:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{\text{gelb}} &= \Delta\lambda_{\text{gelb}}^{\text{grün}} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta} && \text{mit} \\ \sigma_{\Delta\lambda_{\text{gelb}}} &= \Delta\lambda_{\text{gelb}}^{\text{grün}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta\alpha}}{\Delta\beta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta\beta} \Delta\alpha}{\Delta\beta^2}\right)^2} \end{aligned}$$

Hierbei ist $\Delta\lambda_{\text{gelb}}$ die Differenz der gelben Wellenlängen und $\Delta\lambda_{\text{gelb}}^{\text{grün}}$ die Differenz zwischen gelb und grün. Da wir die Winkeldifferenz mit dem Millimetertrieb gemessen haben, müssen wir sie erst umrechnen. Das geschieht wie beim Prismenspektrometer. Der Abstand von dritter Linse zu Okular bleibt wie oben, auch der Fehler kann genauso abgeschätzt werden. Aus den Fehler der am Millimetertrieb gemessenen Längen erhalten wir also die Fehler für $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ analog zu Gleichung 8. Mit den Ergebnissen für $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ für 1., 4. und 8. Ordnung sowie der aus den Angaben in Tabelle 1 berechneten Differenz $\Delta\lambda_{\text{gelb}}^{\text{grün}}$ erhalten wir das folgende gewichtete Mittel für $\Delta\lambda_{\text{gelb}}$:

$$\underline{\underline{\Delta\lambda_{\text{gelb}} = (11 \pm 2) \text{ nm}}}$$

4.2.4 Auflösungsvermögen

Mit Gleichung 7 haben wir das Auflösungsvermögen beim Gitterspektrographen beschrieben. Die Beugungsordnung ist uns bekannt, nur die Anzahl N der beleuchteten Spalte müssen wir noch herausfinden. Mit der Gitterkonstanten a und den in der letzten Messung bestimmten Werten d_{\min} können wir schreiben $N = \frac{d_{\min}^1}{a}$ und damit gilt für das Auflösungsvermögen A bei der k -ten Beugungsordnung:

$$A = k \cdot \frac{d_{\min}}{a}$$

Der Fehler berechnet sich dann zu

$$\sigma_A = k \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{d_{\min}}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a d_{\min}}{a^2}\right)^2}.$$

In Tabelle 4 finden sich die Ergebnisse für A . Nun berechnen wir A mit der Definition $A = \frac{\lambda_{\text{gelb}}}{\Delta\lambda_{\text{gelb}}}$. Mit den angegebenen bzw. berechneten Werten erhalten wir

$$\underline{A = 54 \pm 10.}$$

Um das maximal erreichbare Auflösungsvermögen bei erster Ordnung zu berechnen, muss nach Gleichung 7 die Anzahl der beleuchteten Spalte maximal sein. D.h., wir müssen das gesamte Gitter beleuchten. Mit der angegebenen Breite $b = 1.5 \text{ cm}$ des Gitters erhalten wir

$$A_{\max} = \frac{b}{a} = 1583 \pm 2, \quad \text{mit}$$
$$\sigma_{A_{\max}} = \sigma_a \cdot \frac{b}{a^2}.$$

4.2.5 Wellenlänge der violetten Linie

Um die Wellenlänge λ_{violett} der violetten Linie zu bestimmen, benutzen wir wieder Gleichung 6. Wir erhalten daraus durch umformen

$$\lambda_{\text{violett}} = \frac{a \sin \alpha}{k},$$

¹Begründung: Die Spalte waren in guter Näherung direkt hinter dem Gitter angebracht. Von daher kann man annehmen, dass die Breite des für die Messung geeigneten Spaltes sich mit der Breite des Lichtstrahls auf dem Gitter deckt. Dann gilt dieser Zusammenhang offensichtlich.

Ordnung des Maximums	Auflösungsvermögen
1	320 ± 30
4	630 ± 110
8	1690 ± 220

Tabelle 4: Das Auflösungsvermögen beim Gitterspektrometer für die erste, vierte und achte Ordnung

wobei k die Ordnung des Maximums, α der Beugungswinkel und a die oben berechnete Gitterkonstante ist. Der Fehler $\sigma_{\lambda_{\text{violett}}}$ ist dann gegeben durch

$$\sigma_{\lambda_{\text{violett}}} = \frac{1}{k} \sqrt{(\sigma_a \sin \alpha)^2 + (\sigma_\alpha a \cos \alpha)^2}.$$

Mit diesen Gleichungen berechnen wir dann den gewichteten Mittelwert für unsere Messungen der Winkel für die erste, vierte und achte Ordnung. Dieser ergibt sich zu

$$\underline{\underline{\lambda_{\text{violett}} = (476 \pm 2) \text{ nm.}}}$$

5 Diskussion

5.1 Das Prismenspektrometer

Wie schon im Auswertungsteil kurz angedeutet, stimmen die experimentell bestimmten Winkeldispersionen – für Praktikumsverhältnisse – recht gut mit den Literaturangaben überein.

Dass es keine Überschneidung des Fehlerintervalls mit diesem Wert gibt, spricht eher dafür, dass z.B. der Auslenkungsunterschied $\Delta\delta$ zwischen gelber und grüner Linie mit einem zu geringen Fehler belegt wurde.

Problematisch ist sicherlich auch die verwendete Mittelwertbildung bei den Wellenlängen. Dies stellt einen systematischen Fehler dar, dessen Höhe aber nicht genau abschätzbar ist, da die exakten Positionen der gelben Linien weiter nicht bekannt sind.

Besser wäre es allerdings gewesen, den Winkelunterschied der ersten gelben Linie zur grünen aufzunehmen und darüber den Abstand zur zweiten gelben zu berechnen.

Der Wert der Winkeldispersion für beide Prismen wurde nach demselben Verfahren bestimmt, liefert damit denselben Fehler, was auch bedeutet, dass die Kronglas-Messung mit einem relativen Fehler von 9.76% als ungenauer betrachtet wird als die Flintglas-Messung mit einem relativen Fehler von 2.27%.

Unerfreulich ist die Rechnung zur Bestimmung des Spaltdurchmessers. Mit der angegebenen Rechenformel ergibt sich eine Vergrößerung $V < 1$, was bedeuten würde, dass der Aufbau den Spalt kleiner abbildet als dessen reale Größe.

Vermutlich ist die Idee der Anordnung aber eine Vergrößerung des Spaltbildes, um dessen Breite besser ausmessen zu können. Wo hier der Fehler liegt, ist nicht klar, da die beiden in der Rechnung verwendeten Größen entweder angegeben oder sorgfältig gemessen wurden. Bei der Messung des Abstandes „Linse 3 - Okular“ ergibt sich eine leicht erhöhte Unsicherheit durch den Umstand, dass das Okular selbst eine nicht vernachlässigbare Länge hat.

Möglich ist auch, dass die zur Berechnung verwendete Formel fehlerhaft ist. Die experimentelle Bestimmung des Auflösungsvermögens hat beim Kronglas-Prisma verhältnismäßig gut funktioniert. Zwar liegt der theoretische Wert nicht einmal in einer 3σ -Umgebung, stimmt aber wenigstens von der Größenordnung überein, was beim Praktikum schon einen Erfolg darstellt.

Der Wert für das schwere Flintglas ist leider viel zu hoch, auch deutlich höher als das theoretische Auflösungsvermögen.

Da der Wert für die Dispersion einen plausiblen Wert annimmt, dürfte die Verfälschung dieses Wertes von einer fehlerhaften Bestimmung des Spaltdurch-

messers herrühren.

Hier war wiederum das Problem, dass nie wirklich zwei getrennten Linien zu erkennen waren und der Punkt, an dem sie verschwimmen, nur sehr ungenau festzulegen war. Dabei wurde die Spaltgröße S scheinbar deutlich zu groß gemessen.

Ähnliches gilt für das maximale Auflösungsvermögen.

5.2 Gitterspektrometer

Die Ergebnisse bei der Messung mit dem Gitterspektrometer sind nicht wirklich zufriedenstellend. Es gibt zum Teil deutliche Unterschiede zu den erwarteten Werten. Über das Ergebnis für die Gitterkonstante kann man nicht viel sagen, da man keinen Vergleichswert hat. Für die anderen Werte können wir aber Folgendes feststellen:

Differenz der gelben Wellenlängen In Tabelle 1 sind die angegebenen Werte für die Wellenlängen aufgelistet. Aus diesen Werten ergibt sich $\Delta\lambda_{\text{gelb}}^{\text{angegeben}} = 2.11 \text{ nm}$. Der aus unseren Messdaten berechnete Wert ist jedoch $\Delta\lambda_{\text{gelb}}^{\text{gemessen}} = (11 \pm 2) \text{ nm}$. Das ergibt eine Abweichung von gut 520%. Hier muss also an einer Stelle ein großer systematischer Fehler zugrunde liegen. Die Winkelmessung scheint hier nicht perfekt abgelaufen zu sein. Dies liegt wahrscheinlich auch daran, dass im Okular nur relativ breite Beugungstreifen zu erkennen waren und deshalb die Winkeldifferenzen $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ schlecht gemessen wurden.

Auflösungsvermögen Beim Auflösungsvermögen gibt es unterschiedlich gute Ergebnisse: Aufgrund des ziemlich großen relativen Fehlers bei der Bestimmung der Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda_{\text{gelb}}$ ist das hieraus berechnete Auflösungsvermögen deutlich niedriger als den Berechnungen mit den eingesetzten Spalten erwartet. Setzt man allerdings in $A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ den angegebenen Wert $\Delta\lambda_{\text{gelb}}^{\text{angegeben}}$ ein, so deckt sich das berechnete Auflösungsvermögen gut mit dem Wert für das mit $A = k \cdot \frac{d_{\text{min}}}{a}$ berechnete Auflösungsvermögen für $k = 1$.

Das heißt, da sich die mit $\Delta\lambda_{\text{gelb}}^{\text{angegeben}}$ und mit den Spalten berechneten Werte für A gut decken, dass die Gitterkonstante a relativ gut bestimmt worden sein muss (weil diese ja in der Formel für A benötigt wird).

Das maximale Auflösungsvermögen für die erste Ordnung liegt noch deutlich über dem von uns berechneten Wert (es ist knapp das 6-fache davon). D.h., es war bei unserem Versuch wohl nur ein sehr kleiner Teil des Spaltes beleuchtet.

Wellenlänge der violetten Linie Der von uns berechnete Wert für die Wellenlänge der violetten Linie liegt deutlich über den in Tabelle 1 angegebenen Werten. Mit dem Mittelwert aus den angegebenen Wellenlängen erhalten wir $\lambda_{\text{violett}}^{\text{angegeben}} = 406.22 \text{ nm}$. Unser berechneter Wert lag bei $\lambda_{\text{violett}}^{\text{berechnet}} = (476 \pm 2) \text{ nm}$. Das ergibt eine Abweichung von etwas mehr als 17%. Der Fehler für die berechnete Wellenlänge wurde aber deutlich zu klein abgeschätzt. Auch hier waren wahrscheinlich die Beugungslinien im Okular zu breit, um genau messen zu können.

5.3 Vergleich der Auflösungsvermögen

Das maximale Auflösungsvermögen allein für die erste Ordnung beim Gitterspektrometer ist deutlich größer als das des Spektrometers mit dem Flintglasprisma: $A_{\text{Gitter}} = 1583 \pm 2$ und $A_{\text{Flintglas}} = 1320 \pm 50$. Dieses ist seinerseits noch einmal deutlich höher als das des Kronglasprisma-Aufbaus: $A_{\text{Kronglas}} = 166 \pm 20$. Beim Gitteraufbau können also deutlich höhere Auflösungen erzielt werden. Allerdings sollte man berücksichtigen, dass das maximale Auflösungsvermögen beim Gitter nicht erreicht wurde. Aber auch das gemessene Auflösungsvermögen für die achte Ordnung ist mit $A_{8.\text{Ord}} = 1690 \pm 220$ deutlich höher als das des Prismenspektrometers, hat aber auch einen deutlich größeren Fehler.