



---

VERSUCH 2

DIE GRAVITATIONSWAAGE

---

*Praktikant:*

Tobias Wegener  
Alexander Osterkorn

*E-Mail:*

tobias.wegener@stud.uni-goettingen.de  
a.osterkorn@stud.uni-goettingen.de

*Tutor:*

Marten Düvel

*Gruppe:*

3

*Durchgeführt am:*  
1.7.2013

*Protokoll abgegeben:*  
1.7.2013

Testiert:

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Gravitation . . . . .	3
2.2	Torsion . . . . .	3
2.3	Gravitationswaage . . . . .	4
2.3.1	Vorüberlegungen . . . . .	4
2.3.2	Endergebnis . . . . .	5
2.4	Weiteres . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1	Schwingungsplots und Periodendauer . . . . .	7
4.2	Bestimmung der Gravitationskonstanten . . . . .	8
4.3	Vergleich des Ergebnisses . . . . .	9
4.4	Bestimmung des Torsionsmoduls . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>jo</b>	<b>10</b>
	<b>Literatur</b>	<b>11</b>

# 1 Einleitung

Das Ziel dieses Versuchs ist es, die Gravitationskonstante, eine der am ungenaueren bekannten Naturkonstanten, experimentell zu bestimmen. Dabei wird eine klassische Methode, die Gravitationswaage nach *Cavendish* und *Eötvös*, verwendet.

## 2 Theorie

### 2.1 Gravitation

Die *Gravitation* ist eine fundamentale physikalische Kraft, die zwischen zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  wirkt die sich im Abstand  $r$  befinden. Die Stärke der Gravitationskraft berechnet sich nach dem *Newtonschen Gravitationsgesetz* [Demtröder, 2013, S. 64]:

$$\vec{F}_G = \gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r \quad (1)$$

Dabei ist  $\gamma$  die *Gravitationskonstante*, die sich nur experimentell bestimmen lässt. Der in der Versuchsbeschreibung angegebene Referenzwert ist

$$\gamma = 6,672\,59(85) \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \quad (2)$$

### 2.2 Torsion

Unter *Torsion* versteht man die Verdrehung eines Materials unter Einwirkung eines Drehmoments. Eine umfangreiche Diskussion dieses Begriffs soll hier ausbleiben, wichtig ist, dass sich das *Torsionsmoment*  $M_T$  (das wirkende Drehmoment) eines Fadens der Länge  $l$  und des Radius  $R$  durch den Torsionswinkel  $\theta$  (siehe Abb. 1) ausdrücken lässt. Mit dem Torsionsmodul  $G$ , einer Materialkonstanten, gilt dann<sup>1</sup>:

$$M_T = G \cdot \frac{\pi R^4}{2l} \cdot \theta \quad (3)$$

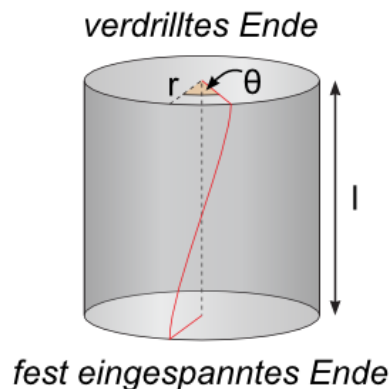


Abbildung 1: Schema einer Torsion (von <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3577>)

Das Torsionsmoment lässt sich mithilfe der Winkelrichtgröße  $D$  schreiben zu

$$M_T = D \cdot \varphi \quad (4)$$

<sup>1</sup>nach <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3577>

## 2.3 Gravitationswaage

### 2.3.1 Vorüberlegungen

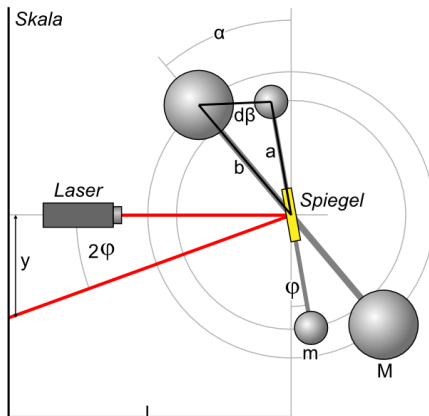


Abbildung 2: Schema einer Torsion (von <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3577>)

Abb. 2 zeigt ein Schema der Gravitationswaage. Aus geometrischen Überlegungen, die hier nicht im Einzelnen nachvollzogen werden sollen, erhält man für das von der Gravitation hervorgerufene Drehmoment:

$$M_{\text{grav}} = 2a\gamma \frac{Mm}{d^2} \sin(\beta) \quad (5)$$

wobei  $M$  die Masse der großen,  $m$  die Masse der kleinen Kugeln ist.  $a$  ist der Abstand der kleinen Kugeln von der Drehachse,  $d$  ist der Abstand der Mittelpunkte von einer kleinen Kugel zur nächstgelegenen großen Kugel.

$\beta$  schließlich bezeichnet den Winkel zwischen der Verbindungsachse der kleinen Kugeln und der Verbindungsachse zwischen einer kleinen und der nächstgelegenen großen Kugel.

Die Winkelrichtgröße ist im Vorhinein nicht bekannt, kann aber über die Periodendauer der Schwingung bestimmt werden, es gilt [Demtröder, 2013, S. 138]:

$$D = \frac{4\pi^2}{T^2} I \quad (6)$$

wobei  $I$  das Trägheitsmoment der kleinen Massekugeln ist. Für eine Massekugel ist  $I = \frac{2}{5}mr_m^2$  [Demtröder, 2013, S. 135], wobei  $r_m$  der Radius der kleinen Kugel ist. Mit dem Satz von Steiner [Demtröder, 2013, S. 132] folgt dann für das Gesamtträgheitsmoment

$$I = 2m \left( \frac{2}{5}r^2 + a^2 \right)$$

Aus weiteren geometrischen Überlegungen an Abb. 2 und der Annahme, dass die Winkel-Auslenkung  $\varphi$  zur Nulllage der einzelnen Schwingungen vernachlässigbar klein ist, folgen die Formeln

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha) \quad (7)$$

und

$$\sin(\beta) = \frac{b}{d} \sin(\alpha) \quad (8)$$

Dabei ist  $a$  der bekannte Abstand der kleinen Kugeln voneinander,  $b$  entsprechend der Abstand der großen Kugeln voneinander und  $\alpha$  der Auslenkungswinkel der großen Kugeln, also im Falle des Versuches  $\pm 45^\circ$ .  $d$  ist wie oben definiert.

### 2.3.2 Endergebnis

Der entscheidende Schritt ist nun, das rücktreibende Drehmoment bzw. Torsionsmoment in Glg. 4 mit dem durch die Gravitation hervorgerufenen Drehmoment in Glg. 5 gleichzusetzen.

Das definiert einen Ruhezustand, um den die kleinen Kugeln eine Schwingung ausführen. Benutzt man nun noch die Formeln 6, 8 und 7 und setzt alles in die Gleichung ein, so erhält man tatsächlich eine geschlossene Formel für die Gravitationskonstante:

$$\gamma = 4\pi^2 \varphi \frac{\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right) (a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha))^{\frac{3}{2}}}{T^2 M a b \sin(\alpha)} \quad (9)$$

### 2.4 Weiteres

Nützlich ist noch eine Formel zur Bestimmung des Drehwinkels  $\varphi$  des Spiegels in Abhängigkeit vom abgelesenen Ausschlag  $\bar{y}$  gegenüber der Nulllage.

Auch aus Abb. 2 kann man entnehmen, dass

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\bar{y}}{l}\right) \quad (10)$$

gilt. Dabei ist  $l$  die senkrechte Lichtzeigerlänge, die den Abstand von Spiegel und Ableseskala angibt.

## 3 Durchführung

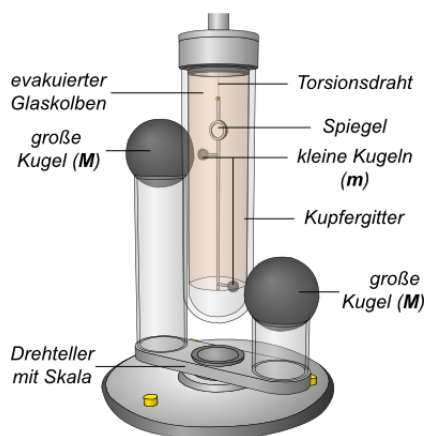


Abbildung 3: Skizze Versuchsaufbau (von <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3577>)

Abb. 3 enthält eine Skizze des Versuchsaufbaus.

In einem evakuierten Glaskolben befinden sich zwei kleine Metallkugeln, die mit einem Torsionsfaden verbunden sind, der sich längs durch den Glaskolben spannt. Um den Glaskolben herum sind zwei deutlich schwerere Bleikugeln drapiert, die über einen Drehteller um den Glaskolben herum bewegt werden können.

Der Torsionsfaden ist mit einem kleinen Spiegel verbunden, der einen Laserstrahl

auf eine an der Labordecke befestigte Messskala reflektiert.

Drehen sich nun die inneren Kugeln, so verdrillen sie den Torsionsfaden, was zu einer Drehung des Spiegels führt und der Laserpunkt auf der Skala seine Position verändert.

Zu Beginn wird die Ruheauslenkung des Laserpunktes auf der Messskala notiert.

Danach beginnt die eigentliche Messung.

Der Drehteller mit den schweren äußeren Bleikugeln wird zunächst um  $45^\circ$  gegenüber der ursprünglichen Lage ausgelenkt.

Dann wird ca. 45 Minuten lang die Position des Laserpunktes auf der Messskala alle 15 Sekunden abgelesen und aufgeschrieben.

Exakt dieses Verfahren wird wiederholt, wobei der Drehteller nun um  $45^\circ$  in die andere Richtung gegenüber der ursprünglichen Lage verdreht wird.

Zuletzt wird der Drehteller wieder ordnungsgemäß in den Anfangszustand zurückgedreht.

## 4 Auswertung

### 4.1 Schwingungsplots und Periodendauer

Tabelle 1: Parameter der Gravitationswaage

Parameter/Apparatur	$I$
Senkrechte Lichtzeigerlänge $l$	265 cm
Masse der großen Kugeln $M$	10 142 g
Masse der kleinen Kugeln $m$	20 g
Radius der kleinen Kugeln $r$	0,75 cm
Abstand Schwerpunkt-Drehachse kleine Kugeln $a$	2,4 cm
Abstand Schwerpunkt-Drehachse große Kugeln $b$	10,15 cm

Zu Beginn der Auswertung ist es hilfreich, die Messdaten in  $y$ -Richtung so zu verschieben, dass eine Schwingung um Null dargestellt wird. Daher muss man einen geeigneten Wert finden, um den die Daten verschoben werden. Dazu bietet es sich an, die Minima und Maxima zu vergleichen. Dabei muss die Dämpfung der Schwingung berücksichtigt werden. Es reicht also nicht, zwei aufeinanderfolgende Extremwerte zu vergleichen. Geht man davon aus, dass eine lokal als linear angenommene Dämpfung eine gute Näherung darstellt, so liefert ein Vergleich eines Extremwertes (z.B. Minimum) mit den beiden benachbarten (Maxima) einen richtigen Wert für die Verschiebung in  $y$ -Richtung. Diese berechnet sich daher dann konkret nach folgender Formel:

$$\bar{y}_i = \frac{y_{i-1} + y_{i+1} + 2y_i}{4}$$

Der Wert  $\bar{y}_i$  wird für alle Extrema ausgerechnet, das nicht am Rand liegen, sodass ein Mittelwert  $\bar{y}$  bestimmt werden kann. Da für das Lichtsignal eine generelle Ableseungenauigkeit von  $\sigma y = 0,25$  cm angenommen werden kann, ergibt sich für die  $\bar{y}_i$  der konstante Fehler

$$\begin{aligned}\sigma \bar{y}_i &= \sqrt{2 \left( \frac{0,25 \text{ cm}}{4} \right)^2 + \left( \frac{0,25 \text{ cm}}{2} \right)^2} \\ &\approx 0,6 \text{ cm}\end{aligned}$$

Für die Messungen 1 und 2 ergeben sich dann folgende Werte als Endeinstellungen des Lichtzeigers:

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= (122 \pm 0,6) \text{ cm} \\ \bar{y}_2 &= (96,7 \pm 0,6) \text{ cm} \\ \Rightarrow \bar{y} &= (109,4 \pm 0,6) \text{ cm}\end{aligned}$$

Werden nun die Messwerte von den beiden Messungen um den jeweiligen  $\bar{y}$ -Wert in negative  $y$ -Richtung verschoben, so stellen sie eine Schwingung um Null dar (vgl. Abb. 4.1).

Aus den Abständen je zweier aufeinanderfolgender Maxima (oder Minima) lässt

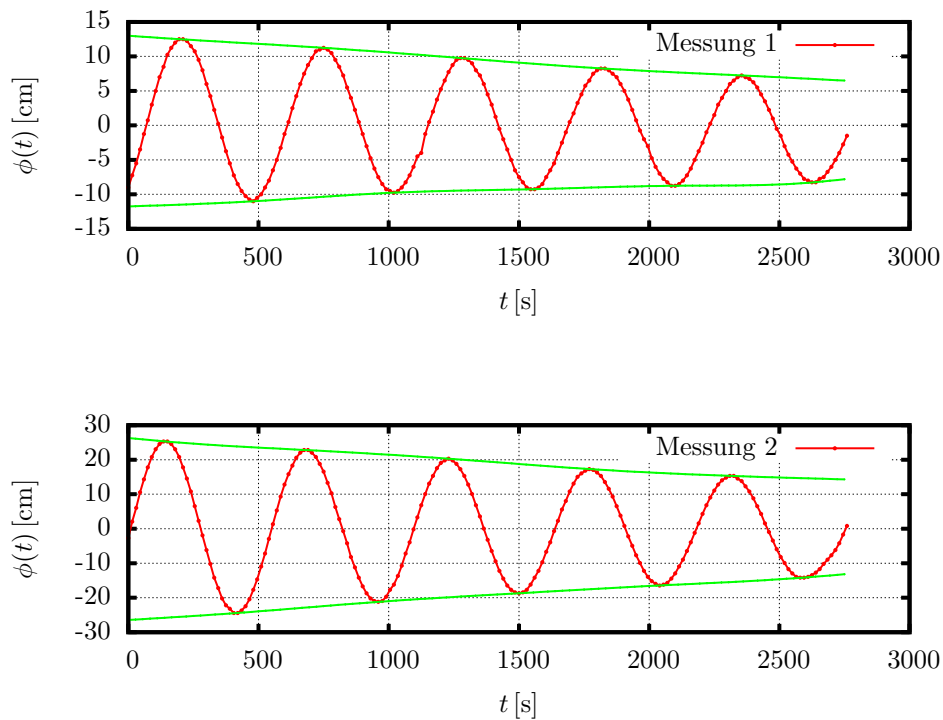


Abbildung 4: Schwingungskurven

sich dann ein Wert für die Schwingungsdauer bestimmen, sodass aus diesen Werten dann die mittlere Periodendauer  $T$  berechnet werden kann. Für die Zeitmessung wird der systematische Fehler der Stoppuhr berücksichtigt:

$$\sigma t_{sys} = 0,01 + 0,005 \cdot t$$

Aus den einzelnen Schwingungsdauern  $T_i$  lässt sich dann die mittlere Periodendauer  $T$  als gewichteter Mittelwert berechnen:

$$T_1 = (543 \pm 4) \text{ s}$$

$$T_2 = (544 \pm 6) \text{ s}$$

$$\Rightarrow T = (544 \pm 4) \text{ s}$$

## 4.2 Bestimmung der Gravitationskonstanten

Die Nullage des Lichtzeigers vor der ersten Messung wurde zu  $y_0 = 110,25$  abgelesen. Aus der Differenz dieses Wertes und der  $\bar{y}$ -Werte lässt sich entsprechend die mittlere Auslenkung ablesen. Später werden die diesen Auslenkungen entsprechenden Winkel  $\varphi$  benötigt. Sie lassen sich nach Gl. 10 berechnen:



$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_y}{2l \cdot \left(1 + \frac{y^2}{l^2}\right)}$$

$$\varphi_1 = (0,0222 \pm 0,0011) \text{ cm}$$

$$\varphi_2 = (0,0255 \pm 0,0012) \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \varphi = (0,0239 \pm 0,0012) \text{ cm}$$

Die Gravitationskonstante  $\gamma$  lässt sich dann nach Gl. 9 bestimmen:

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^2 = & \left( 4\pi^2 \frac{\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right) (a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha))^{\frac{3}{2}}}{T^2 M ab \sin(\alpha)} \cdot \sigma_\varphi \right)^2 + \\ & \left( 8\pi^2 \varphi \frac{\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right) (a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha))^{\frac{3}{2}}}{T^3 M ab \sin(\alpha)} \cdot \sigma_T \right)^2 \\ & + \left( \frac{16}{5} \cdot r\pi^2 \varphi \frac{(a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha))^{\frac{3}{2}}}{T^2 M ab \sin(\alpha)} \cdot \sigma_r \right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \gamma = (7 \pm 0,5) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

Berechnet man die Gravitationskonstante für die beiden Messungen einzeln, erhält man folgende Werte:

$$\gamma_1 = (6,5 \pm 0,5) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\gamma_2 = (7,5 \pm 0,5) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

Das Ergebnis der ersten Messung ist offensichtlich näher am Literaturwert als das zweite.

Zu vermuten ist, dass sich das daraus ergibt, dass die inneren kleinen Kugeln bei Start der zweiten Messreihe bereits von Anfang an eine kinetische Energie besitzen und deshalb der Skalenwert der Ruhelage nicht so passend für diese Messreihe ist wie für die erste, wo die beiden Kugeln aus der Ruhe heraus gestartet sind.

### 4.3 Vergleich des Ergebnisses

Der unter Formel 2 angegebene Wert liegt noch im Fehlerintervall des hier gemittelten Wertes. Die prozentuale Abweichung liegt bei etwa 4,6 %, was wohl ungefähr der in einem physikalischen Anfängerpraktikum erwartbaren Genauigkeit entspricht. Gemessen an dem "enormen" Aufwand, der zur Bestimmung der genauesten bisher festgestellten Werte für die Gravitationskonstante unternommen wurde, ist das Ergebnis dieses Versuchs zufriedenstellend.

Auf die möglichen Schwach- und Fehlerstellen dieser Versuchsdurchführung wird dann noch in der Diskussion eingegangen.

## 4.4 Bestimmung des Torsionsmoduls

Glg. 3 gibt eine Möglichkeit, das Torsionsmodul  $G$  des Fadens zu bestimmen. Analog zur vorherigen Rechnung wird wieder von einer Gleichheit des Torsionsmomentes  $M_T$  und des durch die Gravitation hervorgerufenen Drehmomentes (Glg. 5 ausgegangen). Das liefert

$$G \frac{\pi r_F^4}{2 L_F} \varphi = 2a\gamma \frac{M m}{d^2} \sin(\beta)$$

was man umformt zu

$$G = \gamma \frac{4 a L_F M m}{\pi r_F^4 d^2 \varphi} \sin(\beta)$$

Dabei ist  $r_F$  der Radius des Torsionsfadens und  $L_F$  seine Länge. Diese Werte sind in der Praktikumsanleitung angegeben zu  $r_F = 10 \mu\text{m}$  und  $L_F = 720 \text{mm}$ .

Mit den schon aus der Theorie bekannten Beziehungen 8 und 7 kann man diese Formel nun auf nur bekannte Größen zurückführen.

Man erhält

$$G = \gamma \frac{4 L_F M m a b \sin(\alpha)}{\pi r_F^4 \varphi (a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha))^{\frac{3}{2}}}$$

Mit den bekannten Werten folgt daraus  $G = 1,4 \cdot 10^{11} \text{Pa}$ .

## 5 Diskussion

Zur Einordnung der Ergebnisse für die Gravitationskonstante wurde bereits etwas in der Auswertung geschrieben.

Hier sollen nun vor allem noch mögliche Fehlerquellen der Messung benannt werden. Grundsätzlich ist natürlich festzustellen, dass es sich bei diesem Versuch um eine Präzisionsmessung handelt, die empfindlich ist gegenüber leichten Veränderungen der Randbedingungen.

So ließ es sich nicht immer vermeiden, dass die an der Labordecke befestigte Ableseskala in Schwingung versetzt wurde und somit das Ablesen ungenauer gemacht hat. Analog können bereits leichte Erschütterungen der Messapparatur zu einer Verfälschung der Spiegel- und damit Messpunktposition führen.

Die Berechnung des Wertes für den Torsionsmodul erfolgte recht analog zur Berechnung der Gravitationskonstanten.

Der in der Praktikumsanleitung angegebene Vergleichswert ist  $1,85 \cdot 10^{-11} \text{Pa}$ , was recht gut mit dem berechneten Wert zusammenpasst.

## Literatur

Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 1*. Springer Spektrum, 2013.