



---

VERSUCH 20

# FRESNELSCHE FORMELN UND POLARISATION

---

*Praktikant:*

Tobias Wegener

Christian Gass

Alexander Osterkorn

*E-Mail:*

tobias.wegener@stud.uni-goettingen.de

christian.gass@stud.uni-goettingen.de

a.osterkorn@stud.uni-goettingen.de

*Tutor:*

Danny Schwarzbach

*Gruppe:*

6

*Durchgeführt am:*

5.3.2014

*Protokoll abgegeben:*

12.3.2014

Testiert:

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>2</b>
2.1	Polarisation . . . . .	2
2.2	Fresnelsche Formeln . . . . .	2
2.3	Brewsterwinkel . . . . .	3
2.4	Doppelbrechung . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
3.1	Versuchsaufbau . . . . .	5
3.2	Vorbereitungen . . . . .	5
3.3	Durchführung der Messungen . . . . .	6
3.4	Nicolsches Prisma . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1	Drehung der Schwingungsebene des Lichtes . . . . .	7
4.2	Bestimmung des Brechungsindex für $\gamma = 45^\circ$ . . . . .	9
4.3	Bestimmung des Brechungsindex durch den Brewsterwinkel . .	10
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>11</b>
5.1	Drehung der Schwingungsebene . . . . .	11
5.2	Brechungsindex . . . . .	11
	<b>Literatur</b>	<b>12</b>

# 1 Einleitung

Polarisation findet an vielen Stellen im alltäglichen Leben eine wichtige Rolle. Beispielsweise wäre 3D-Kino nicht ohne Polarisation möglich. Ein besseres Verständnis von Polarisation soll in diesem Versuch erreicht werden. Polarisiertes Licht lässt sich zum Beispiel mit bestimmten Kristallen oder auch mit durch Bestrahlen einer Grenzschicht erreichen. Deshalb ist es wichtig, Transmission und Reflexion an solchen Grenzschichten zu verstehen, um gezielt polarisiertes Licht erzeugen zu können. Auch das betrachten wir uns in diesem Versuch genauer.

## 2 Theorie

### 2.1 Polarisation

Aufgrund der Form der Maxwell'schen Gleichungen sind elektromagnetische Wellen Transversalwellen, d.h., die Schwingung erfolgt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung [Dem13, S. 192f.]. Im Normalfall entstehen elektromagnetische Wellen durch statistische Prozesse wie z.B. das Zurückfallen eines Elektrons auf einen niedrigeren Energiezustand im Atom, weshalb die Schwingungsrichtungen verschiedener Elementarwellen auch statistisch verteilt sind. Durch verschiedene Prozesse kann man aber diese Schwingungsrichtungen ordnen, so dass z.B. alle Teilwellen in dieselbe Richtung schwingen. Elektromagnetische Wellen, die auf diese Weise geordnet sind, heißen **polarisiert**, für den erklärten Fall, dass alle Teilwellen in dieselbe Richtung schwingen, heißt die Welle **linear polarisiert**.

### 2.2 Fresnelsche Formeln

Die Veränderung der Ausbreitungsrichtung einer gebrochenen (Index  $g$ ) bzw. reflektierten (Index  $r$ ) elektromagnetischen Welle gegenüber der Eingangswelle (Index  $e$ ) beim Übergang aus einem Medium 1 mit Brechungsindex  $n_1$  in ein Medium 2 mit Brechungsindex  $n_2$  wird beschrieben über das SNELLIUSsche Brechungsgesetz und die Beziehung „Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel“ [Dem13, S. 233]:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' \\ n_1 \sin \alpha &= n_2 \sin \beta. \end{aligned} \tag{1}$$

Dieser Vorgang ist in Abbildung 1 mit gleicher Benennung der Größen skizziert.

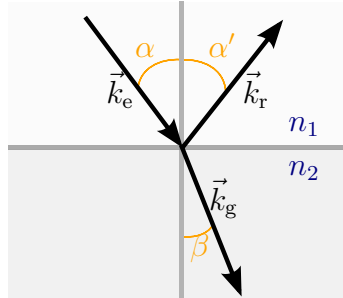


Abbildung 1: Brechung an einer Grenzfläche.  $\vec{k}$  bezeichnet jeweils den Wellenvektor.

Berücksichtigt man nun bei diesem auf die Grenzfläche treffenden Strahl dessen Welleneigenschaften, so kann man Aussagen über die Amplitude der reflektierten und der gebrochenen Welle machen. Hierzu definiert man sich die Einfallsebene als die vom Wellenvektor  $\vec{k}$  der eingehenden Welle und dem Lot der Grenzfläche aufgespannte Ebene. Durch Stetigkeitsüberlegungen beim Übergang von einem in das andere Medium kann man die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten senkrecht (Index  $s$  und parallel (Index  $p$ ) zur Einfallsebene berechnen. Der Reflexionskoeffizient  $\varrho$  ist dabei das Verhältnis der Amplitude der reflektierten und der Amplitude der einfallenden Welle, der Transmissionskoeffizient  $\tau$  das Verhältnis der Amplitude der gebrochenen und der einfallenden Welle. Nach [Dem13, S. 234] gilt:

$$\varrho_s = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad \tau_s = \frac{2 \sin \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (2)$$

$$\varrho_p = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)}, \quad \tau_p = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \quad (3)$$

Diese Gleichungen werden auch FRESNELSche Formeln genannt. In Abbildung 2 sind beispielhaft die Verläufe der Quadrate der Koeffizienten  $\varrho_p$  und  $\varrho_s$  in abhängigkeit von  $\alpha$  dargestellt. Eingezeichnet ist auch der zugehörige Brewsterwinkel.

### 2.3 Brewsterwinkel

Betrachtet man sich Gleichung 3, so sieht man, dass wegen  $\tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \infty$  der Reflexionskoeffizient  $\varrho_p$  für  $\alpha + \beta = 90^\circ$  verschwindet. Das heißt, es wird kein Licht parallel zur Einfallsebene reflektiert. Somit ist das reflektierte Licht vollständig senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Mit Gleichung 1 kann man sehen, dass der Winkel  $\alpha$  für  $\alpha + \beta = 90^\circ$  eindeutig bestimmt ist. Man

nennt ihn den **Brewsterwinkel**  $\alpha_B$ . Weiter kann man mit Gleichung 1 zeigen, dass die folgende Bedingung, genannt Brewsterbedingung, erfüllt sein muss [Dem13, S. 236f.]:

$$\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (4)$$

## 2.4 Doppelbrechung

Doppelbrechung entsteht bei Kristallen, die eine ausgezeichnete, sog. **optische Achse** besitzen. Der Kristall hat unterschiedliche Brechungsindizes entlang und senkrecht zu dieser Achse. Trifft Licht auf einen solchen Kristall, so wird der Teil der Welle senkrecht zur optischen Achse (dieser heißt ordentlicher Strahl) gemäß dem SNELLIUSSchen Gesetz 1 gebrochen, der Teil parallel zu dieser Achse (außerordentlicher Strahl) verhält sich anders, s. z.B. [Dem13, S. 246f.]. Dieses Phänomen kann dazu genutzt werden, Licht zu polarisieren.

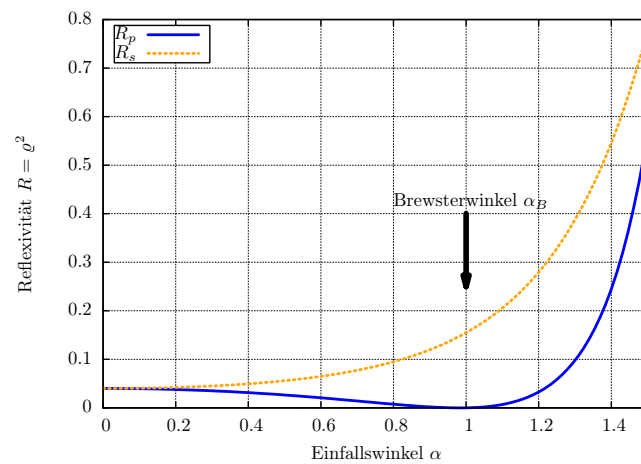


Abbildung 2: Die Reflexivität  $R = \varrho^2$ , also das Quadrat der Reflexionskoeffizienten, aufgetragen gegen den Einfallswinkel  $\alpha$  für  $n_1 = 1$  und  $n_2 = 1.5$ .

## 3 Durchführung

### 3.1 Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau besteht aus einer optischen Schiene. Vorjustiert ist bereits ein Aufbau aus zwei Linsen, zwischen denen ein Spalt angebracht ist, der im Fokus von beiden Linsen liegt. Damit wird paralleles kohärentes Licht hergestellt. Hinter dieser Konfiguration ist ein Grünfilter montiert und dahinter ein Polarisator. Diesem Polarisator folgt ein Drehteller, auf dem während des Versuchs verschiedene Prismen justiert werden. Hinter dem Drehteller wird bei Bedarf ein Analysator, der aus einem Nicolschen Prisma besteht und mit einer Winkelskala versehen ist, eingebaut. Ganz am Ende der Schiene ist ein Okular befestigt. Der Aufbau ist in Abbildung 3 skizziert.

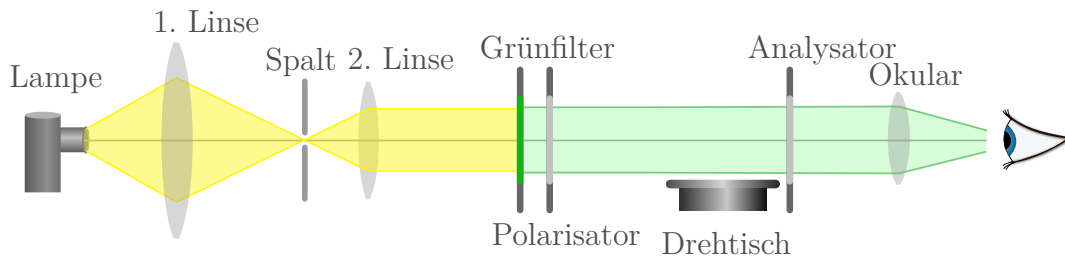


Abbildung 3: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus. Auf dem Drehteller werden die verschiedenen Prismen montiert.

### 3.2 Vorbereitungen

- Zu Beginn befindet sich kein Prisma im Strahlengang. Der Versuchsaufbau wird gerade gedreht (d.h. Glanzwinkel  $0^\circ$ ) und das Lichtbündel wird mit dem Okular scharf fixiert.
- Nun wird das Nicolsche Prisma auf den Drehteller gestellt. Der Analysator wird aus dem Aufbau genommen und der Polarisator wird so gedreht, dass kein Licht beim Okular ankommt. Danach wird der Polarisator um  $45^\circ$  gedreht.
- Als letztes wird das Nicolsche Prisma aus dem Aufbau entfernt und das Glasprisma auf den Drehteller gestellt. Es muss folgendermaßen justiert werden: Der Schwenkarm wird um  $90^\circ$  ausgelenkt und das abgelenkte Licht mit dem Millimetertrieb auf das Fadenkreuz eingestellt. Danach wird der Schwenkarm um  $45^\circ$  ausgelenkt. Liegt der Lichtstrahl jetzt immer noch über dem Fadenkreuz, so ist das Prisma richtig justiert.

### 3.3 Durchführung der Messungen

**Reflexionskoeffizient** Dazu wird der Analysator wieder in den Aufbau gebaut und der Schwenkarm auf  $90^\circ$  ausgelenkt. Der Einfallswinkel  $\alpha$  am Prisma wird nun in  $2.5^\circ$ -Schritten verringert, wobei bei jedem Schritt der Analysator so gedreht werden soll, dass kein Licht im Okular ankommt<sup>1</sup>. Die Stellung des Analysators wird jeweils notiert.

**Brewster-Winkel des Glasprismas** In 5 Messungen wird der Brewsterwinkel des Prismas bestimmt. D.h., die Polarisationsrichtung wird parallel zur Einfallsebene gedreht und der Schwenkarm wird so weit ausgelenkt, bis kein Licht mehr im Okular ankommt. Der Einfallswinkel am Prisma bei dieser Auslenkung entspricht dem Brewsterwinkel  $\alpha_B$  des Prismas.

### 3.4 Nicolsches Prisma

Ein NICOLSches Prisma ist ein Prisma, das Doppelbrechung ausnutzt. Es besteht aus einem Kristall (in Form eines Rhomboeders) mit einer ausgezeichneten optischen Achse, der in der Diagonalen Fläche und schräg zur optischen Achse aufgeschnitten und z.B. mit Kanada-Balsam zusammengeklebt wird. Wichtig ist, dass der Brechungsindex des Kanada-Balsams kleiner ist als der des ordentlichen Strahls, aber größer als der des außerordentlichen. Bestrahlt man nun das NICOLSche Prisma passend, so erfährt der ordentliche Strahl Totalreflexion. Totalreflexion folgt direkt aus dem Brechungsgesetz 1: Mit  $\sin \alpha_1 \leq 1$  folgt  $\sin \alpha_2 \leq \frac{n_1}{n_2}$ . Ist jetzt aber  $n_1 > n_2$ , so kann der Strahl nicht gebrochen werden, das heißt, er wird komplett reflektiert. Damit kommt nur der außerordentliche Strahl auf der Rückseite des Prismas an und kann dort austreten. Also ist das Licht hinter dem Prisma parallel zur optischen Achse des Kristalls polarisiert. In Abbildung 4 ist ein Nicolsches Prisma skizziert.

---

<sup>1</sup>*Bem.:* Hier ist vom Einfallswinkel am Prisma die Rede. Dieser verringert sich um  $2.5^\circ$ , wenn sich der Auslenkwinkel des Schwenkarmes um  $5^\circ$  ändert.

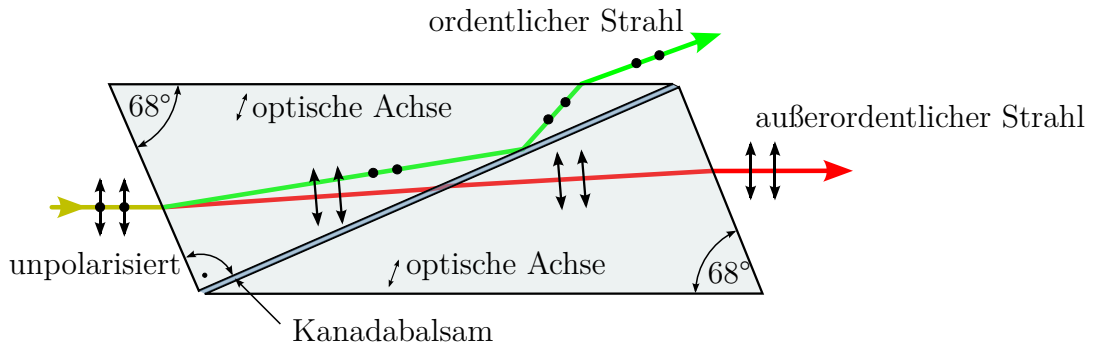


Abbildung 4: Schematische Darstellung eines Nicolschen Prismas. Quelle: [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nicols\\_prism\\_DE.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nicols_prism_DE.svg), 09.03.2014.

## 4 Auswertung

### 4.1 Drehung der Schwingungsebene des Lichtes

Wir wollen nun die Drehung  $\gamma$  der Schwingungsebene des Lichtes in Abhängigkeit vom Einfallswinkel  $\alpha$  am Prisma bestimmen. Da der Polarisator um  $45^\circ$  geneigt ist, ist der Betrag des  $\vec{E}$ -Feldes vor dem Auftreffen auf dem Prisma parallel zur Einfallsebene genauso groß wie der Betrag senkrecht zur Einfallsebene. Nach den FRESNELSchen Formeln 2 und 3 sind aber der Betrag des parallelen reflektierten Feldes  $E_r^p$  und der Betrag des senkrechten reflektierten Feldes  $E_r^s$  nicht zwingenderweise gleich, sondern vom Einfallswinkel  $\alpha$  abhängig. Abbildung 5 veranschaulicht dies. Teilt man die Gleichungen 2 und 3 durcheinander, so kann man schreiben:

$$\tan(45^\circ + \gamma) = \frac{E_r^s}{E_r^p} = \frac{\varrho_s}{\varrho_p} = \frac{-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}}{\frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan(\alpha+\beta)}} = -\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

Formen wir mit dem SNELLIUSSchen Brechungsgesetz und der Näherung  $n_{\text{Luft}} \approx 1$  den Winkel  $\beta$  nach  $\alpha$  um, so erhalten wir:

$$\tan(45^\circ + \gamma) = -\frac{\cos \left[ \alpha - \arcsin \left( \frac{\sin \alpha}{n_{\text{Prisma}}} \right) \right]}{\cos \left[ \alpha + \arcsin \left( \frac{\sin \alpha}{n_{\text{Prisma}}} \right) \right]} \quad (5)$$

Das liefert den theoretischen Wert für  $\gamma(\alpha)$ . Nun müssen wir aus unserem gemessenen Winkel  $\vartheta$  am Schwenkarm den Einfallswinkel  $\alpha$  am Prisma berechnen. Dies erfolgt mittels  $\alpha = 90^\circ - \frac{\vartheta}{2}$ . Das kann man wie folgt herleiten:



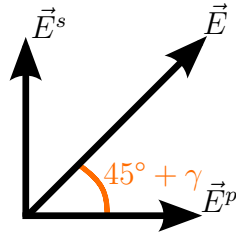


Abbildung 5: Die Anfangsneigung des Polarisators ist  $45^\circ$ . Der Winkel  $\gamma$  charakterisiert die Verdrehung gegenüber der Anfangsneigung.

Wird der Schwenkarm um einen Winkel  $\vartheta$  ausgelenkt, so wird das Prisma nur um den halben Winkel  $\varphi = \frac{\vartheta}{2}$  ausgelenkt. Da der Einfallswinkel am Prisma aber zum Lot und nicht zur Prismafäche selbst gemessen wird, gilt  $\alpha = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - \frac{\vartheta}{2}$ .

Um den Drehwinkel  $\gamma$  zu erhalten, müssen wir noch ein paar Überlegungen anstellen: Bei einem Einfallswinkel von  $90^\circ$  durchläuft der Strahl das Prisma nicht. Faktisch „läuft er gerade daran vorbei“. Damit wird hier die Richtung der Schwingungsebene nicht geändert, also erwarten wir  $\gamma = 0^\circ$  für  $\alpha = 90^\circ$ . Das ist wichtig, da der Analysator keine absolute Drehung misst und nur die Änderung der Drehung bei verschiedenen Einfallswinkeln beschrieben werden kann. Leider haben wir für  $\alpha = 90^\circ$  keinen Wert am Analysator aufnehmen können, da man für zu große  $\alpha$  nichts mehr erkennen konnte. Aus diesem Grund behelfen wir uns wie folgt:

Die Theoriekurve ist im Bereich der gemessenen Einfallswinkel näherungsweise linear. Wir fitten die aufgenommenen Daten für die am Analysator gemessenen Winkel deshalb via  $f(x) = m \cdot x + b$  und führen danach eine Verschiebung der  $y$ -Achse durch, sodass die Nullstelle der Fitgerade genau bei  $\alpha = 90^\circ$  liegt. Diese Verschiebung berechnen wir dann in die Werte für  $\gamma$  mit ein. Die so erhaltenen Ergebnisse und die Theoriekurve sind in Abbildung 6 aufgetragen. Da die Theoriekurve in Wirklichkeit natürlich keine Gerade ist, ergibt sich aus der linearen Näherung ein kleiner Fehler. Diesen schätzen wir ab mit  $\sigma_{\text{Näherung}} = 0.05 \text{ rad}$ , was in etwa der Hälfte der vorgenommenen  $y$ -Verschiebung entspricht. Der Fehler für  $\alpha$  ergibt sich aus dem Fehler  $\sigma_\vartheta$  des Auslenkwinkels  $\vartheta$  zu  $\sigma_\alpha = \frac{\sigma_\vartheta}{2}$ . Dieser wiederum wurde mit der kleinsten Skaleneinheit zu  $\sigma_\vartheta = 1^\circ$  abgeschätzt. Der Fehler des Analysatorwinkels wurde etwas größer mit  $\sigma_{\text{Analysator}} = 5^\circ$  abgeschätzt, da man in einem Bereich dieser Größe nicht genau sagen konnte, wo das Minimum des ankommenden Lichtes ist. Der Gesamtfehler für  $\gamma$  ist damit  $\sigma_\gamma = \sigma_{\text{Analysator}} + \sigma_{\text{Näherung}} = 0.2 \text{ rad}$ .

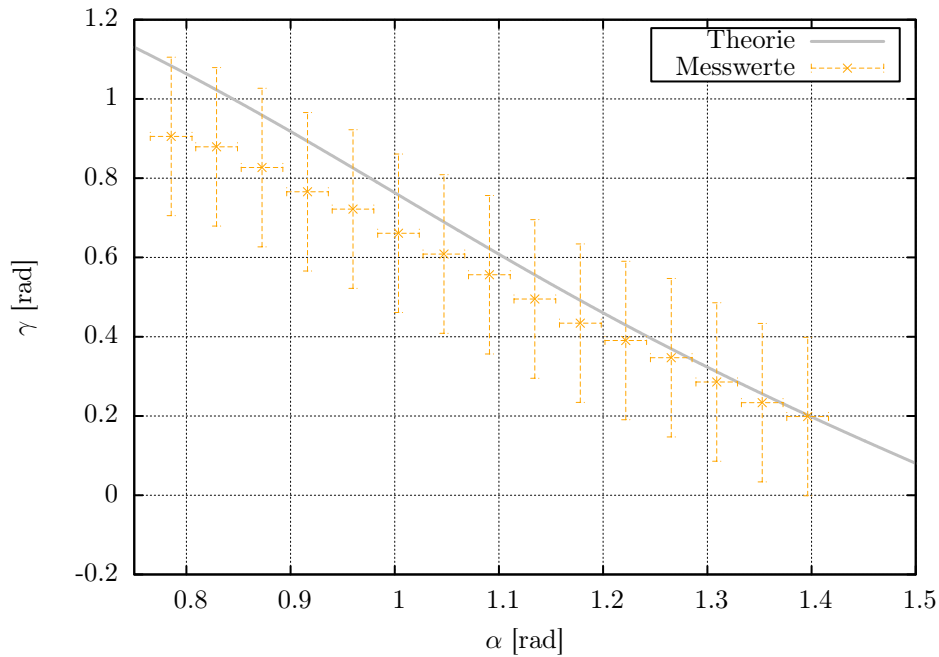


Abbildung 6: Der Drehwinkel  $\gamma$  in Abhängigkeit vom Einfallswinkel  $\alpha$  am Prisma.

## 4.2 Bestimmung des Brechungsindex für $\gamma = 45^\circ$

Wir betrachten und Gleichung 5. Für  $\gamma = 45^\circ$  erhalten wir:

$$\infty = -\frac{\cos\left[\alpha - \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n_{\text{Prisma}}}\right)\right]}{\cos\left[\alpha + \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n_{\text{Prisma}}}\right)\right]}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \cos\left[\alpha + \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n_{\text{Prisma}}}\right)\right] \\ \Rightarrow \frac{\pi}{2} &= \alpha + \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n_{\text{Prisma}}}\right) \\ \Rightarrow \tan\alpha &= n_{\text{Prisma}} \end{aligned}$$

Wir sehen, dass das wegen  $n_{\text{Luft}} \approx 1$  genau die Brewsterbedingung ist. In Abbildung 7 haben wir die Messwerte in einer Umgebung von  $\gamma = 45^\circ$  zusammen mit einer von `gnuplot` durchgeführten linearen Regression aufgetragen. Wir lesen aus dieser Abbildung für  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  einen Wert von  $\alpha = (0.90 \pm 0.01)$  rad =  $(51 \pm 1)^\circ$  ab. Damit ist

$$\underline{\underline{n_{\text{Prisma}} = 1.26 \pm 0.03.}}$$

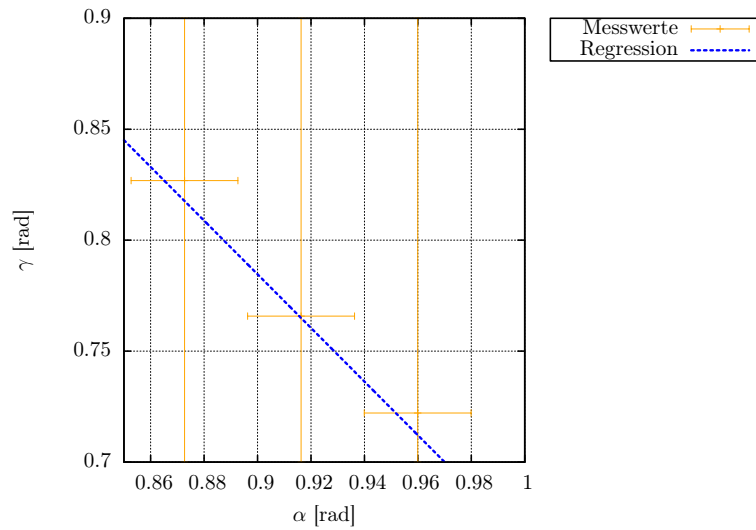


Abbildung 7: Zoom der Messwerte für  $\gamma$  um  $\gamma = 45^\circ$  mit linearer Regression

Der Fehler ergibt sich hierbei aus der Fehlerfortpflanzung zu  $\sigma_{n_{\text{Prisma}}} = \frac{\sigma_\alpha}{\cos^2 \alpha}$ .

### 4.3 Bestimmung des Brechungsindex durch den Brewsterwinkel

Gleichung 4 beschreibt die Brewsterbedingung. Mit  $n_{\text{Luft}} \approx 1$  erhalten wir damit:

$$n_{\text{Prisma}} = \tan \alpha_B \quad \text{mit}$$

$$\sigma_{n_{\text{Prisma}}} = \sigma_{\alpha_B} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha_B}.$$

Der Brewsterwinkel berechnet wie oben aus dem Auslenkwinkel  $\vartheta$  des Schwenkarms. Also ist  $\sigma_{\alpha_B} = \frac{\sigma_\vartheta}{2}$ . Aus unseren Messungen ergibt sich der Mittelwert des Brewsterwinkels zu

$$\alpha_B = (56 \pm 1)^\circ.$$

Damit erhalten wir für  $n_{\text{Prisma}}$ :

$$\underline{\underline{n_{\text{Prisma}} = 1.46 \pm 0.05}}$$

## 5 Diskussion

### 5.1 Drehung der Schwingungsebene

Die Werte für die Drehung  $\gamma$  der Schwingungsebene sind vor allem für kleine Einfallswinkel  $\alpha$  etwas zu klein (s. Abb. 6). Da sie aber etwas langsamer abfallen als die Theoriekurve rücken sie für größere  $\alpha$  immer dichter an diese heran. Trotzdem sind alle Werte für  $\gamma$  relativ zufriedenstellend, da die Theoriekurve immer innerhalb der Fehlerschranken liegt. Das deutet darauf hin, dass der lineare Fit zur Korrektur der Werte angebracht war und keinen allzu großen Fehler verursacht hat. Auch kann man gut die Form der Theoriekurve anhand der Messwerte nachvollziehen, was für gute Werte spricht.

### 5.2 Brechungsindex

Die Ergebnisse für den Brechungsindex sind in den beiden Berechnungen jeweils unterschiedlich gut. Angegeben ist ein Wert  $n_{\text{Prisma}}^{\text{angegeben}} = 1.510 \pm 0.005$ . Bei der direkten Bestimmung des Brewsterwinkels hatten wir  $n_{\text{Prisma}}^{\text{Brewster}} = 1.46 \pm 0.05$ . Das ist zwar mit einer Abweichung von etwa 3.4% etwas zu gering, liegt aber noch in den Fehlerschranken. Das lässt darauf schließen, dass der Brewsterwinkel relativ gut bestimmt wurde, was insofern etwas verwunderlich ist, als das Minimum der Intensität im Okular nur sehr vage bestimmt werden konnte und deshalb der Fehler für den Winkel  $\vartheta$  am Schwenkarm bei diesem Teil mit  $\sigma_{\vartheta} = 5^\circ$  ziemlich groß war.

Aus der graphischen Bestimmung des Brechungsindex bei  $\gamma = 45^\circ$  haben wir einen deutlich schlechteren Wert erhalten:  $n_{\text{Prisma}}^{\text{graphisch}} = 1.26 \pm 0.03$ . Dieser Wert liegt mit einer Abweichung von etwa 16% deutlich unterhalb des angegebenen Wertes. Auch scheint der Fehler hier als viel zu klein angenommen worden zu sein, da der erwartete Wert deutlich außerhalb der Fehlerschranken liegt. Der Fehler ist damit zu begründen, dass die Werte für  $\gamma$  in Abbildung 6 unterhalb der Theoriekurve liegen. Schätzt man den Wert für  $\alpha$  bei  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  graphisch aus der Theoriekurve ab (grob ergibt das  $\alpha \approx 1$  rad), so erhält  $n_{\text{Prisma}}^{\text{Theorie}} \approx 1.55$ . Das ist deutlich näher am erwarteten Wert. Da die Werte für  $\gamma$  für größere  $\alpha$  allerdings gut zu sein scheinen, kann der Fehler darauf beruhen, dass das Prisma minimal falsch auf dem Drehteller justiert wurde, da in der Anleitung extra verlangt wird, das Prisma zur Vermeidung von Fehlern möglichst exakt zu justieren.

## Literatur

- [Dem13] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 2*. Springer Spektrum, 6 edition, 2013.