



GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

PHYSIKALISCHES
GRUNDPRAKTIKUM

VERSUCH 25

DIE SPEZIFISCHE WÄRME

Praktikant:

Tobias Wegener

Christian Gass

Alexander Osterkorn

E-Mail:

tobias.wegener@stud.uni-goettingen.de

christian.gass@stud.uni-goettingen.de

a.osterkorn@stud.uni-goettingen.de

Tutor:

Danny Schwarzbach

Gruppe:

6

Durchgeführt am:

28.2.2014

Protokoll abgegeben:

4.3.2014

Testiert:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Theorie	2
2.1	Thermodynamische Grundbegriffe	2
2.2	Debye-Modell	3
3	Durchführung	4
3.1	Versuchsaufbau	4
3.2	Ablauf der Messung	4
4	Auswertung	6
4.1	Temperaturverläufe für Aluminium und Beryllium	6
4.2	Berechnung der Widerstände und elektrische Leistung	8
4.3	Spezifische Wärmekapazität	10
5	Diskussion	12
5.1	Temperaturverläufe	12
5.2	Berechnung der Widerstände und elektrische Leistung	13
5.3	Spezifische Wärmekapazität	14
	Literatur	15

1 Einleitung

In diesem Versuch wollen wir uns mit der spezifischen Wärme von Festkörpern beschäftigen. Insbesondere wird sich zeigen, dass das *Dulong-Petit-Gesetz* für niedrige Temperaturen versagt und um eine bessere Theorie erweitert werden muss.

2 Theorie

2.1 Thermodynamische Grundbegriffe

In der Thermodynamik ordnet man einem System verschiedene *Zustandsgrößen* wie Druck p , Temperatur T oder Volumen V und *thermodynamische Potentiale* wie innere Energie U und Enthalpie $H := U + p \cdot V$ zu. Hat das System insgesamt f Freiheitsgrade, lässt sich die innere Energie schreiben als

$$U = \frac{1}{2} f k_B T \quad (1)$$

mit der Boltzmann-Konstanten $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$. Man definiert weiter die *Wärmekapazitäten* bei konstantem Druck C_p und bei konstantem Volumen C_V :

$$C_p := \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \quad \text{und} \quad C_V := \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (2)$$

Bei einem Festkörper kann näherungsweise davon ausgegangen werden, dass sich das Volumen kaum mit der Temperatur ändert.

Dann folgt in Glg. 2, dass $C_p \approx C_V =: C$. Die *spezifische Wärmekapazität* c bezieht die Masse m des Festkörpers ein und ist definiert als

$$c = \frac{C}{m}. \quad (3)$$

Im Festkörper wird davon ausgegangen, dass die Atome so miteinander gekoppelt sind, dass sie keine Translations- und Rotationsbewegungen, sondern nur Schwingungen in die drei Koordinatenrichtungen ausführen können.

Für die Beschreibung einer solchen Schwingung müssen Ort und Geschwindigkeit in der jeweiligen Richtung angegeben werden, das entspricht insgesamt 6 Freiheitsgraden des Festkörpers. Mit den Glgen. 1 und 2 folgt $C_V = 3k_B$ bzw. $C_m = 3R$ für die *molare Wärmekapazität* mit der allgemeinen Gaskonstanten $R = N_A \cdot k_B = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Dass für alle Festkörper ab einer bestimmten Temperatur $C_m = 3R$ gilt, ist die Aussage des *Gesetzes von Dulong-Petit*.

2.2 Debye-Modell

Schwingt ein Atom wie oben beschrieben, regt es durch die Kopplung auch seine Nachbaratome zu Schwingungen an. Es entsteht eine longitudinale oder transversale Welle, die an den Rändern des Festkörpers reflektiert und so zu einer stehenden Welle wird (siehe Abb. 1). Die kleinste Wellenlänge (Abb. 1a) entspricht der Schwingung mit der höchsten Energie. Es wird auch der größte Energiebetrag benötigt, um diese Schwingung anzuregen.

Bei kleinen Temperaturen „frieren“ Schwingungen mit Frequenzen oberhalb eines bestimmten Wertes ω_D ein [Dan98, S. 159], die Atome haben nicht mehr ihre vollen Freiheitsgrade zur Verfügung. Die Temperatur, die gerade noch zur Anregung der ω_D -Schwingung ausreicht, heißt *Debye-Temperatur* [Dan98, S. 161]

$$\vartheta_D = \frac{\hbar}{k_B} \omega_D. \quad (4)$$

Im *Debye-Modell* erhält man einen geschlossenen Ausdruck für die Wärmekapazität C durch die Gitterschwingungen. [NWA01, S. 576ff] Als Grenzwerte ergeben sich dann die Regel von Dulong-Petit für $T \gg \vartheta_D$ und [NWA01, S. 583]

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\vartheta_D} \right)^3 \quad \text{für} \quad T \ll \vartheta_D. \quad (5)$$

Zusätzlich zu dieser Wärmekapazität aus den Gitterschwingungen gibt es bei der Gesamtkapazität noch einen Anteil, der von den Elektronen herrührt. Gegen den ersten Anteil kann er aber meist vernachlässigt werden.

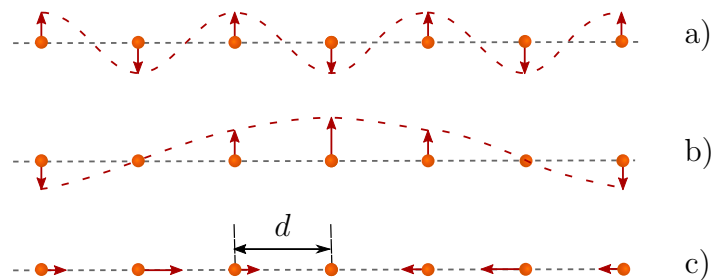


Abbildung 1: Mögliche Schwingungen in einem Festkörper: a) Transversalschwingung mit kleinstmöglicher Wellenlänge b) Transversalschwingung mit größerer Wellenlänge c) Longitudinalschwingung

3 Durchführung

In diesem Versuch sollen zwei verschiedene Materialien in Hinblick auf ihre spezifische Wärmekapazität untersucht werden. Dazu wird der im Folgenden beschriebene Versuchsaufbau verwendet.

3.1 Versuchsaufbau

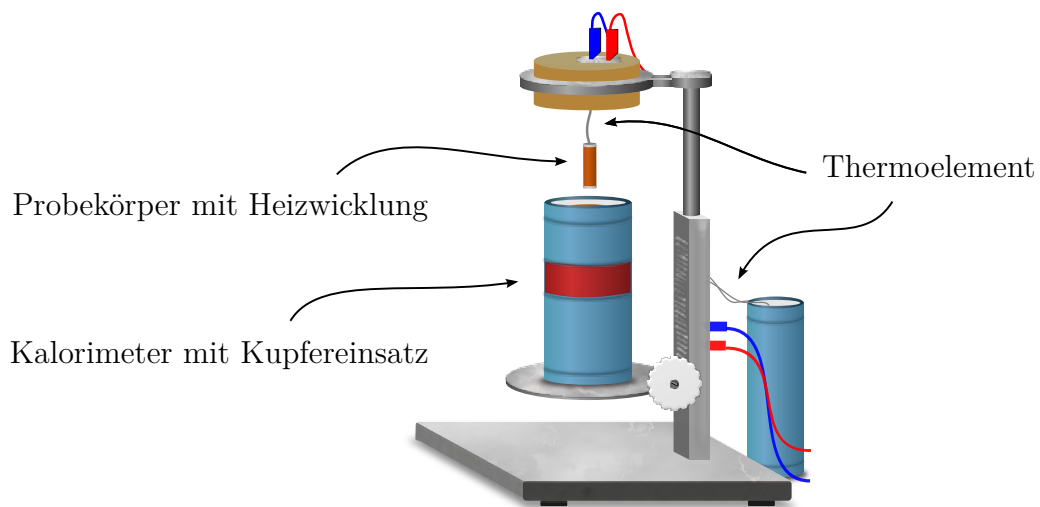


Abbildung 2: Versuchsanordnung

Ein Probekörper hängt (unwickelt von einem Heizdraht) am oberen Teil des Gestells. Seine Temperatur kann über ein Thermoelement gemessen werden, dessen Referenzkontakte in einen Behälter mit Eiswasser getaucht sind. Das Kalorimeter mit Kupfereinsatz steht auf einem höhenverstellbaren Plateau und kann luftdicht abgeschlossen werden indem es so weit hochgedreht wird, bis es gegen die Holzscheibe drückt.

Über die oberen Anschlüsse wird die Spannung am Thermoelement gemessen, aus der sich die Temperatur des Probekörpers berechnen lässt. Die beiden anderen Anschlüsse sind für den Heizstrom bestimmt und werden daher mit dem Netzgerät verbunden.

3.2 Ablauf der Messung

Zunächst muss ein Behälter (*Dewar-Gefäß*) für die Referenzkontakte des Thermoelements mit Eiswasser gefüllt werden. Es ist darauf zu achten, dass diese während des gesamten Versuches im Wasser eingetaucht bleiben.

Der erste der beiden Probekörper (Al und Be) wird in das Kalorimeter (mit Kupfereinsatz) eingeführt, indem dieses hochgedreht wird. Dabei ist darauf zu achten, dass der Probekörper den Kupfereinsatz nicht berührt. Dann kann mit der Messung begonnen werden:

- Über einen Zeitraum von fünf Minuten wird die Temperatur des Probekörpers ohne äußere Heizung als Funktion der Zeit gemessen. Dazu wird alle 30 Sekunden ein Messwert (Spannung des Thermoelements) notiert. Diese Messung dient der Bestimmung eines *Startniveaus*.
- Nun wird der Probekörper erhitzt, indem ihm über einen Heizstrom elektrische Energie zugeführt wird. Um diesen konstant zu halten ist es erforderlich, die Spannung fortlaufend nachzuregulieren. Es ist darauf zu achten, dass die Spannung am Thermoelement 4 mV nicht übersteigt, da dieses sonst beschädigt wird. Es wird vorgeschlagen, einen Heizstrom von 500 mA zu verwenden. Während des Erhitzens soll über einen Zeitraum von 15 Minuten alle 30 Sekunden die Spannung des Thermoelements sowie zusätzlich die des Netzteils notiert werden. Bei der ersten Messung zeigte sich, dass ein Heizstrom von 500 mA nicht ideal ist, da die 4 mV-Grenze des Thermoelements sehr schnell erreicht wird und somit nur wenige Messwerte vorliegen. Da die gleiche Messung auch noch mit einem anderen Probekörper durchzuführen ist, haben wir hier den Heizstrom auf 400 mA reduziert und wesentlich mehr Messwerte erhalten. Während des Erhitzens soll dann über einen Zeitraum von 15 Minuten alle 30 Sekunden die Spannung des Thermoelements sowie zusätzlich die des Netzteils notiert werden.
- Bevor die obere Grenze für die Spannung am Thermoelement erreicht ist, wird der Heizstrom ausgeschaltet. Ab dann wird analog zum vorherigen Teil über einen Zeitraum von mindestens zehn Minuten das Abkühlverhalten des Probekörpers untersucht.

Dann wird die gleiche Messung für den zweiten Probekörper durchgeführt. Nachdem diese beendet ist, wird das Kalorimeter von dem Praktikumsbetreuer mit Stickstoff gefüllt. Dabei ist darauf zu achten, dass der Stickstoff sich ausschließlich außerhalb des Kupfereinsatzes befindet und somit keinen Kontakt zum Probekörper hat.

Nachdem sich im Kalorimeter ein Temperaturgleichgewicht eingestellt hat, werden alle oben beschriebenen Messungen noch einmal mit den Stickstoff-Kalorimeter durchgeführt sowie alle benötigten Daten notiert.

4 Auswertung

4.1 Temperaturverläufe für Aluminium und Beryllium

Um die gemessenen Spannungen U in die entsprechende Temperatur T (in °C) umzurechnen benutzen wir die angegebene Formel

$$T[\text{°C}] = 0.219 + 20.456 \cdot U - 0.302 \cdot U^2 + 0.009 \cdot U^3. \quad (6)$$

Dann ist $T_{\text{Kelvin}} = T_{\text{Celsius}} + 273.15 \text{ K}$. Den Fehler für die Spannung haben wir mit der kleinsten angezeigten Stelle, also $\sigma_U = 0.01 \text{ mV}$, abgeschätzt. Der Fehler für die die Temperatur ergibt sich dann mittels Fehlerfortpflanzung aus Gleichung 6. Den Fehler σ_t in der Zeit haben wir wie bisher immer mit dem angegebenen Fehler für die verwendete Stoppuhr abgeschätzt. Für beide Fehler gilt also:

$$\sigma_T [\text{K}] = \sigma_U \cdot \left| 20.456 - 0.604 \cdot U + 0.027 \cdot U^2 \right| \quad \text{bzw.}$$
$$\sigma_t = 0.01 \text{ s} + 0.005 \cdot \text{Messwert.}$$

In den Abbildungen 3 und 4 sind die Temperaturverläufe beim Erhitzen und beim Abkühlvorgang von Aluminium und Beryllium gegen die Zeit aufgetragen. Dabei ist in Abbildung 3 der Verlauf aufgetragen, bei dem die Metallkörper sich in einer Umgebung mit Raumtemperatur befanden, in Abbildung 4 befanden sich die Metallkörper in einer Stickstoffumgebung. Da bei einem Strom von 0.5 A der Heizvorgang bei Raumtemperatur ziemlich schnell ging, haben wir bei der Messung mit Beryllium den Strom auf 0.4 A reduziert, um mehr Messwerte zu erhalten und den Strom besser konstant halten zu können. Bei den Messungen mit Stickstoffkühlung war ein Strom von 0.5 A in Ordnung.

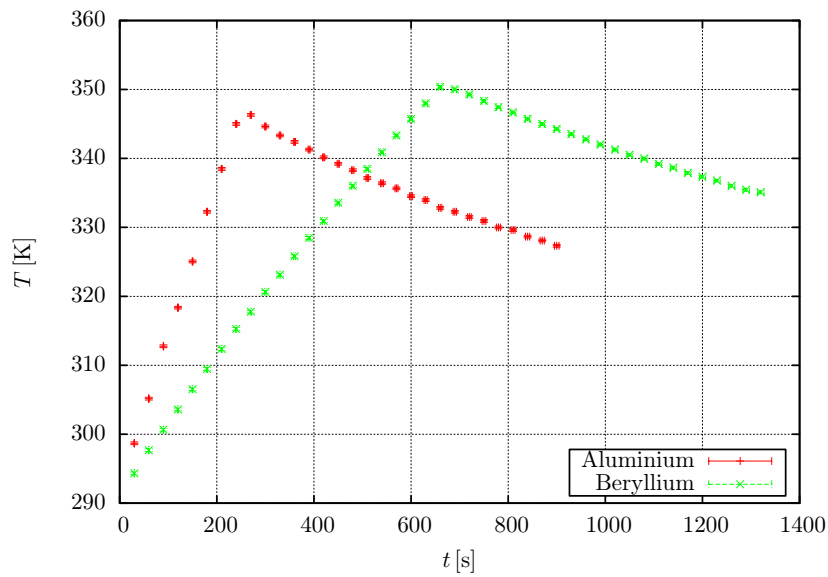


Abbildung 3: Die Temperatur T aufgetragen gegen die Zeit t während des Erhitzungs- und Abkühlungsvorgangs für Aluminium und Beryllium für dem Aufbau bei Raumtemperatur.

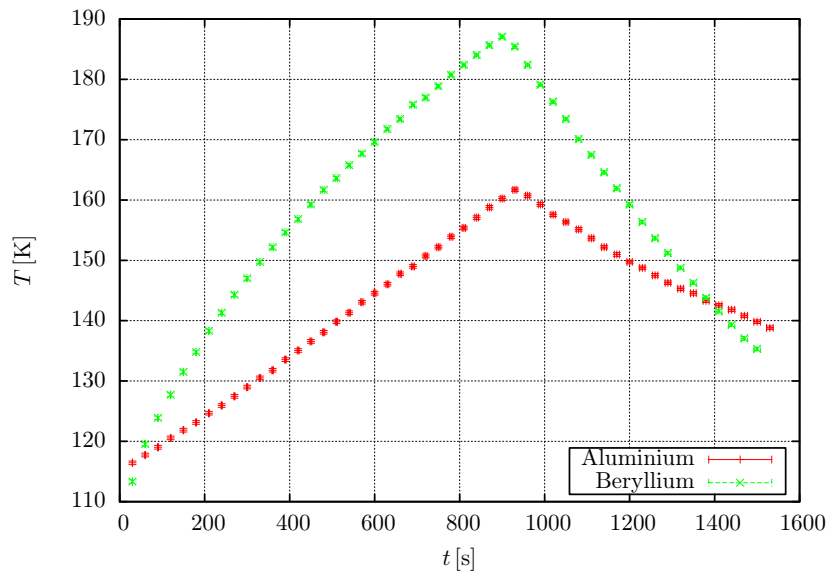


Abbildung 4: Die Temperatur T aufgetragen gegen die Zeit t während des Erhitzungs- und Abkühlungsvorgangs für Aluminium und Beryllium bei dem mit Stickstoff gekühlten Aufbau.

4.2 Berechnung der Widerstände und elektrische Leistung

Die Widerstände der Cu-Heizdrähte werden mit dem *Ohmschen Gesetz* [Dem13b, S. 48] berechnet:

$$R = \frac{U}{I} \quad \text{mit} \quad \sigma_R^2 = \left(\frac{\sigma_U}{I}\right)^2 + \left(\sigma_I \frac{U}{I^2}\right)^2 \quad (7)$$

Der Fehler für den Strom ist mit dem kleinsten Skalenteil der Messinstrumentenskala abgeschätzt, also $\sigma_I = 20 \text{ mA}$.

Die Spannung wurde auf einem Zeigermessinstrument abgelesen, der Fehler wird zu $\sigma_U = 0.2 \text{ V}$ abgeschätzt. Die Celsius-Temperatur wird nach Formel und Fehler wie oben berechnet. Die Abbildungen 5 und 6 zeigen die berechneten Werte.

Der Widerstand R scheint linear mit der Temperatur ϑ zu wachsen. Die Leistung P [Dem13b, S. 147] berechnet man durch

$$P = U \cdot I \quad \text{mit} \quad \sigma_P^2 = (U\sigma_I)^2 + (I\sigma_U)^2 \quad (8)$$

Die Ergebnisse der Berechnungen zeigen die Abb. 7 und 8.

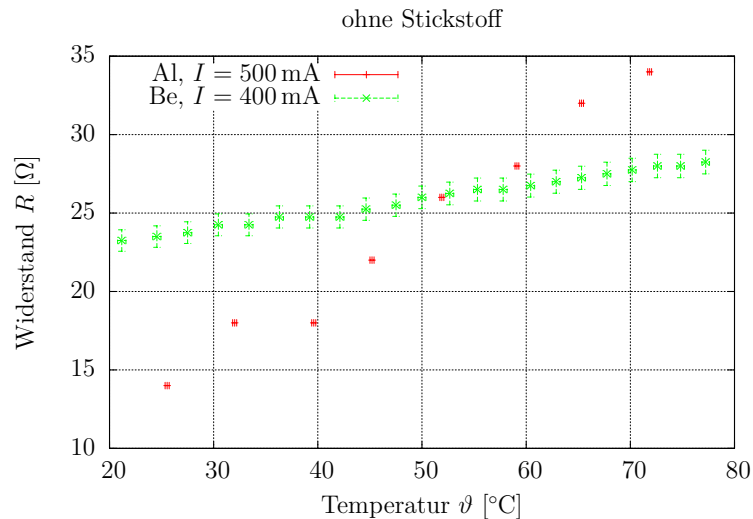


Abbildung 5: Elektrischer Widerstand der Cu-Heizdrähte ohne Stickstoff-Kühlung

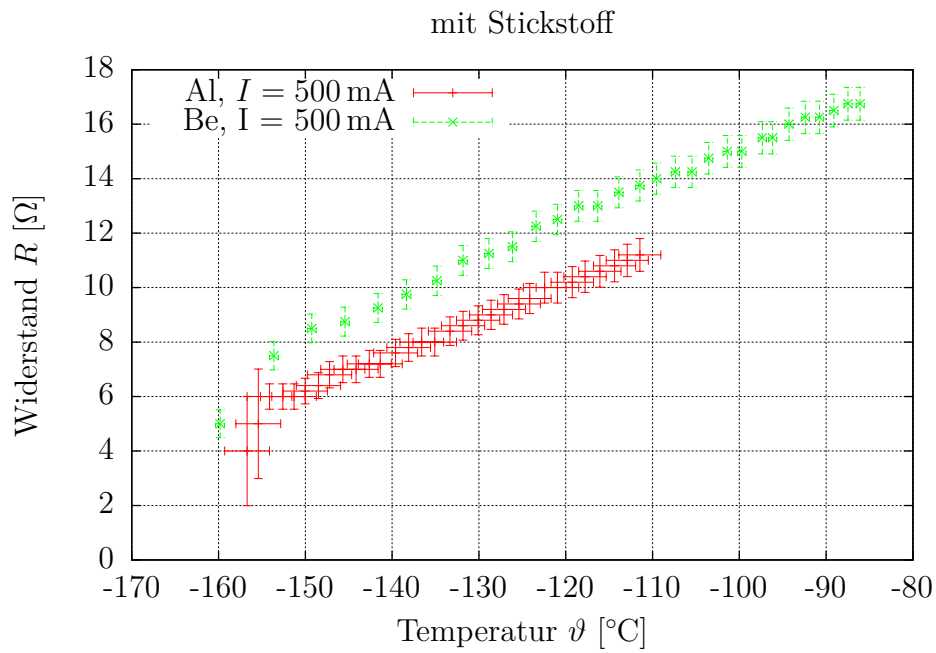


Abbildung 6: Elektrischer Widerstand der Cu-Heizdrähte mit Stickstoff-Kühlung

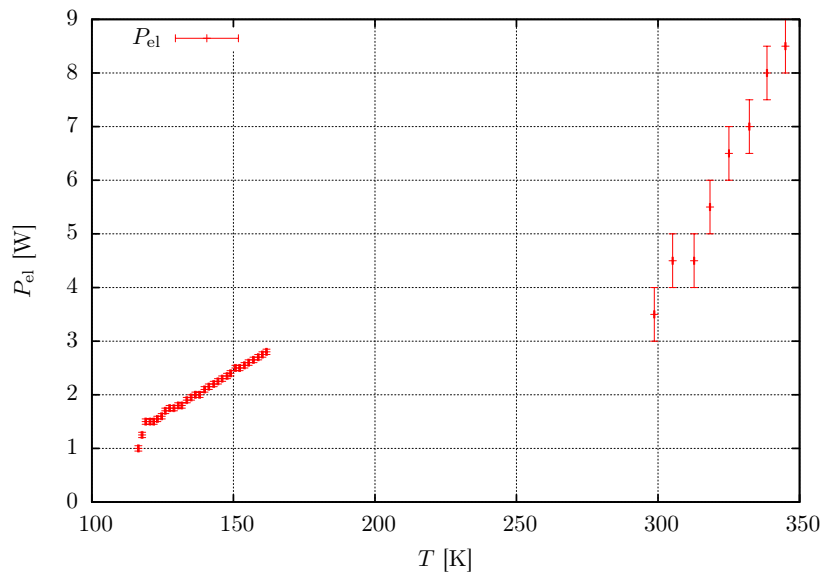


Abbildung 7: Die elektrische Leistung P_{el} beim Erwärmungsvorgang in Abhängigkeit von der Temperatur T für Aluminium.

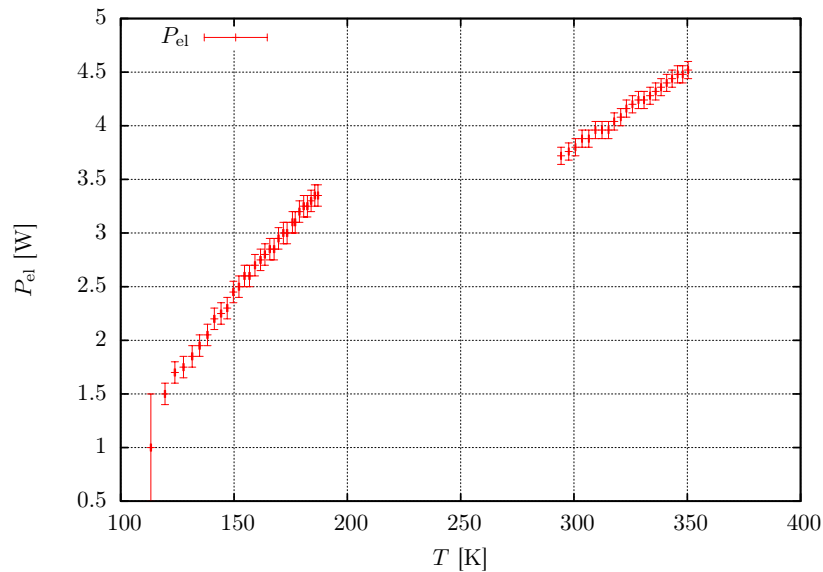


Abbildung 8: Die elektrische Leistung P_{el} beim Erwärmungsvorgang in Abhängigkeit von der Temperatur T für Beryllium.

4.3 Spezifische Wärmekapazität

Wir wollen nun die spezifische Wärme der beiden verwendeten Körper berechnen. Um das tun zu können, müssen wir vorher noch ein paar thermodynamische Überlegungen anstellen. Wir betrachten zuerst den *ersten Hauptsatz der Thermodynamik* (s. z.B. [Dem13a, S.287f.]):

$$\begin{aligned}\Delta U &= \Delta Q + \Delta W \\ \Rightarrow \Delta W &= \Delta U - \Delta Q\end{aligned}$$

wobei U die innere Energie, Q die Wärmemenge W die verrichtete Arbeit bezeichnet. In unserem Fall entspricht W der zugeführten elektrischen Energie – ansonsten wird keine Arbeit verrichtet – und Q der an die Umgebung abgegebenen Wärmemenge. Für die elektrische Leistung P_{el} gilt dann:

$$P_{el} = \frac{dW}{dt} = \frac{dU}{dt} - \frac{dQ}{dt} \quad (9)$$

Betrachten wir uns nun Gleichung 2, so können wir schreiben

$$\frac{dU}{dt} = C \cdot \frac{dT}{dt}$$

mit der Wärmekapazität C . Beim Aufheizprozess führen wir dem System eine elektrische Energie $P_{el,erw} = U \cdot I$ mit der anliegenden Spannung U und dem

Strom I zu (nach [Dem13b, S. 147]), beim Abkühlen ist der Strom und damit $P_{el,abk}$ gleich 0. Das liefert durch Einsetzen in (9):

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= C \cdot \left. \frac{dT}{dt} \right|_{erw} - P_{el,erw} \\ \frac{dQ}{dt} &= C \cdot \left. \frac{dT}{dt} \right|_{abk}\end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen und Umformen erhalten wir daraus:

$$C = \frac{P_{el,erw}}{\left. \frac{dT}{dt} \right|_{erw} - \left. \frac{dT}{dt} \right|_{abk}}$$

Mit der Masse m des jeweiligen Körpers können wir daraus die spezifische Wärmekapazität $c = \frac{C}{m}$ (Gleichung 3) berechnen. Für den Temperaturverlauf bei Erwärmung nehmen wir einen linearen Zusammenhang $T_{erw}(t) = at + b$ an, für den Verlauf bei der Abkühlung erwarten wir einen exponentiellen Abfall $T_{abk}(t) = c \cdot e^{-\lambda t}$. Das ergibt dann

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{erw} = a, \quad \left. \frac{dT}{dt} \right|_{abk} = -\lambda \cdot T_{abk}(t).$$

Damit folgt nun für die spezifische Wärmekapazität c :

$$c(T) = \frac{P_{el}}{m \cdot (a + \lambda T)}$$

Der Fehler σ_c ergibt sich dann nach Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_c = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{\sigma_P^2}{(a + \lambda T)^2} + \frac{P^2 \cdot (\sigma_a^2 + T^2 \sigma_\lambda^2 + \lambda^2 \sigma_T^2)}{(a + \lambda T)^4}},$$

wobei wir σ_P und σ_T wie gehabt berechnen. Die Werte für a und λ berechnen wir mit `gnuplot`. Für die Werte von a führen wir jeweils eine lineare Regression für die Messwerte des Aufheizvorganges durch. Um λ zu bestimmen, tragen wir jeweils den Logarithmus der Temperatur beim Abkühlvorgang gegen die Zeit auf und führen anschließend eine lineare Regression durch. Die von `gnuplot` bestimmten Werte samt Fehlern finden sich in Tabelle 1.

Mit der im vorigen Abschnitt berechneten elektrische Leistung können wir nun die spezifische Wärmekapazität berechnen. Die Ergebnisse sind für Aluminium in Abbildung 9 und für Beryllium in Abbildung 10 jeweils zusammen mit dem nach dem Gesetz von Dulong-Petit erwarteten Wert aufgetragen. Der nach Dulong-Petit erwartete Wert ergibt sich durch

$$c = \frac{3R}{m_{mol}},$$

wobei m_{mol} die molare Masse des verwendeten Materials bezeichnet.

	Al RT	Al Stickstoff	Be RT	Be Stickstoff
a [10^{-3} K s^{-1}]	221 ± 2	50.9 ± 0.3	88.4 ± 0.9	79.7 ± 0.3
λ [10^{-5} s^{-1}]	8.6 ± 0.2	25.4 ± 0.5	7.0 ± 0.1	55.9 ± 0.2

Tabelle 1: Von `gnuplot` berechnete Koeffizienten λ und a für Aluminium und Beryllium bei Raumtemperatur und Stickstoffumgebung samt Fehlern.

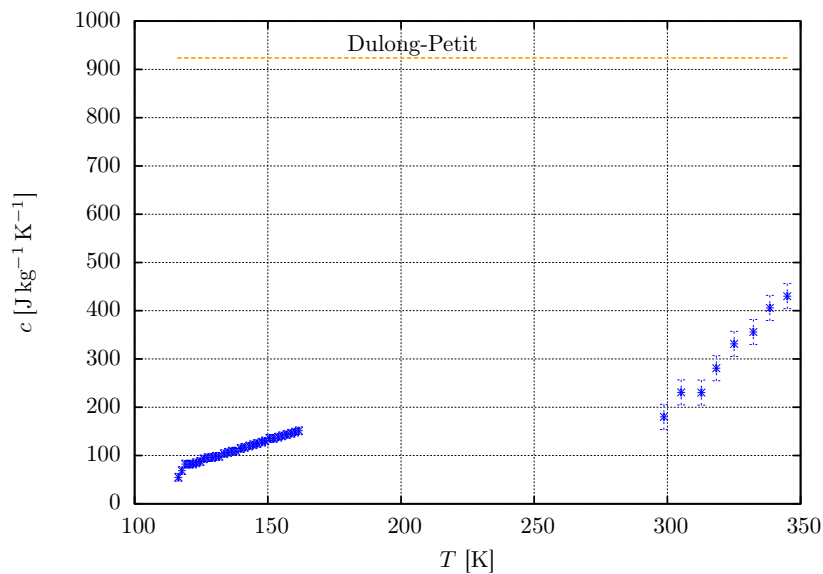


Abbildung 9: Die spezifische Wärmekapazität von Aluminium in Abhängigkeit von der Temperatur. Die orangefarbene Linie markiert den nach *Dulong-Petit* erwarteten Wert.

5 Diskussion

5.1 Temperaturverläufe

Das Erhitzen von Aluminium bei einem Strom von $I = 0.5 \text{ A}$ und Raumtemperatur lief ziemlich schnell ab und lieferte deswegen nur wenige Daten. Wir waren irritiert, dass wir nach ca. 4 Minuten und 30 Sekunden bei dem Maximalwert der Thermospannung waren und nicht nach 15 Minuten, wie in der Praktikumsanleitung beschrieben. Deshalb verbrachten wir einige Zeit mit der Suche nach Fehlern. Von daher wäre es sinnvoll, die Praktikumsanleitung so zu ändern, dass man entweder einen geringeren Strom verwendet, um mehr Messwerte zu bekommen – wir haben für Beryllium dann den Strom auf

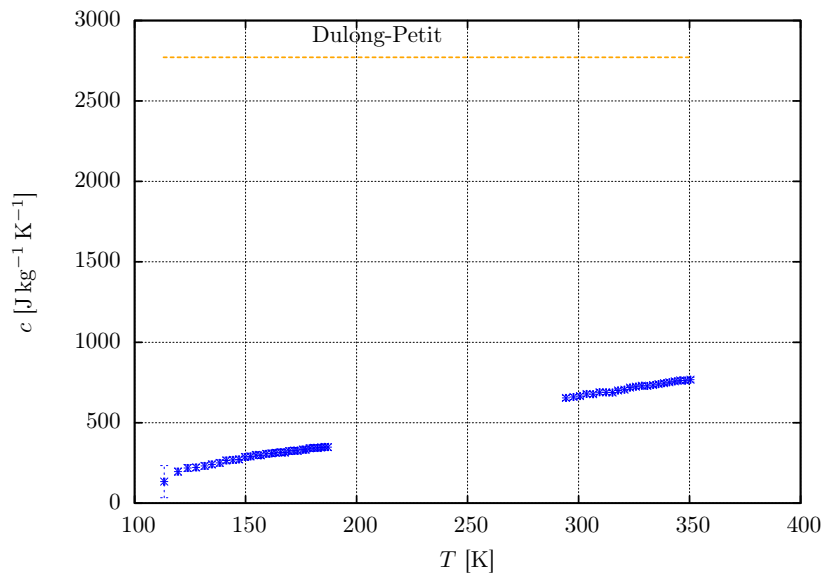


Abbildung 10: Die spezifische Wärmekapazität von Beryllium in Abhängigkeit von der Temperatur. Die orangefarbenen Linie markiert den nach *Dulong-Petit* erwarteten Wert.

$I = 0.4 \text{ A}$ reduziert – oder zumindest, um Verwirrungen zu vermeiden, erklärt, dass der Aufheizvorgang bei Raumtemperatur nur etwa 5 Minuten dauert.

Die eigentlichen Ergebnisse dieses Versuchsteils sind relativ zufriedenstellend: Die Temperaturverläufe entsprechen meistens gut den erwarteten Kurven. Nur in Abbildung 4 scheint bei der Aufheizkurven von Beryllium ein systematischer Fehler zugrunde zu liegen, da der Verlauf für größere Zeiten langsamer anzusteigen scheint. Dies könnte eventuell an der Energieabstrahlung des Körpers an seine mit Stickstoff gekühlte Umgebung liegen, weil dieser eventuell beim Beginn der Messungen noch nicht richtig akklimatisiert war. D.h., dieser Fehler wäre wahrscheinlich dadurch zu beheben, dass man den Körper länger kühlt, bevor man mit der Messung beginnt.

5.2 Berechnung der Widerstände und elektrische Leistung

Die Widerstandswerte haben das intuitiv korrekte Verhalten, mit zunehmender Temperatur zuzunehmen, was man sich vielleicht über eine Zunahme von Stößen zwischen Teilchen innerhalb des Leiters erklären kann.

Bemerkenswerte Unterschiede ergeben sich für die Steigung der Widerstands-

kurve in den Abbildungen 5 und 6. Während die Steigungen in Abb. 6 recht ähnlich sind, steigt die Aluminium-Gerade in Abb. 5 sehr viel stärker an als die Beryllium-Gerade. Das könnte an einem prinzipiellen Unterschied der Temperaturabhängigkeit in verschiedenen Temperaturmilieus liegen.

Wahrscheinlicher aber ist, dass es ein Problem bei der Spannungsmessung gab. Nur für diese Messung wurde die Heizspannung statt am Netzteil an einem parallelgeschalteten Multimeter gemessen. Diese Werte lagen aber deutlich oberhalb der am Netzteil ablesbaren, was für ein fehlerhaftes Multimeter spricht.

Alle folgenden Spannungsmessungen wurden ohne Multimeter durchgeführt. Dieser systematische Fehler (Spannungswerte zu groß) könnte die größere Steigung der Widerstandsgeraden in Abb. 5 erklären.

Auch die Leistungen in Abb. 7 und 8 zeigen ein lineares Verhalten, wie es auch nach $P = U \cdot I = R \cdot I^2$ mit konstantem Strom I und linearer Widerstandszunahme R zu erwarten ist.

Die Steigung für die erste Messung bei Aluminium ist wiederum erstaunlich groß und mag sich auf das Multimeter zurückführen lassen.

5.3 Spezifische Wärmekapazität

Bis auf die Fehler, die aus der falschen Bestimmung der Spannung bei der Erwärmung von Aluminium entstanden sind, scheint der qualitative Verlauf der spezifische Wärmekapazität in den Abbildungen 9 und 10 auf den ersten Blick richtig zu sein. Allerdings sind die Werte für alle Temperaturen deutlich niedriger als die Werte, die nach Dulong-Petit erwartet worden wären, sie scheinen auch für höhere Temperaturen nicht gegen Dulong-Petit zu konvergieren. Bei Vergleichen mit Protokollen von Physikstudenten aus vergangenen Semestern haben wir festgestellt, dass deren Ergebnisse für die Leistung P_{el} in etwa die doppelte bis dreifache Größe von unseren Werten hatten. Für solche Leistungen wären die Verläufe der spezifischen Wärmekapazität auch bei uns zufriedenstellend und lägen für die größeren Temperaturen in der Nähe von Dulong-Petit. Wir konnten bei unserer Berechnung der Leistung, i.e. $P_{\text{el}} = U \cdot I$, allerdings keine Fehler finden, weshalb wir die Ergebnisse so stehen lassen mussten.

Literatur

- [Dan98] Herbert Daniel. *Physik 4*. Walter de Gruyter Verlag, 1998.
- [Dem13a] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 1*, 2013.
- [Dem13b] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 2*. Springer Spektrum, 6 edition, 2013.
- [NWA01] N. David Mermin Neil W. Ashcroft. *Festkörperphysik*. Oldenburg-Verlag München Wien, 2001.