



VERSUCH 4

KREISELPRÄZSSION

Praktikant:

Tobias Wegener

E-Mail:

tobias.wegener@stud.uni-goettingen.de

Mitarbeiter:

Alexander Osterkorn

E-Mail:

a.osterkorn@stud.uni-goettingen.de

Tutor:

Marten Düvel

Gruppe:

3

Durchgeführt am:

22.4.2013

Protokoll abgegeben:

6.5.2013

Testiert:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Trägheitsmoment und Satz von Steiner	3
2.2	Physikalisches Pendel	3
2.3	Kreiselbewegung	3
2.3.1	Präzession eines Kreisels	3
2.3.2	Nutation	4
3	Durchführung	5
4	Auswertung	7
4.1	Übersicht über die vermessenen Objekte	7
4.2	Theoretische Bestimmung der Trägheitsmomente	8
4.3	Empirische Bestimmung der Trägheitsmomente	9
4.3.1	Physikalisches Pendel	9
4.3.2	Präzessionsmessung	10
4.3.3	Nutationsmessung	12
5	Diskussion	13
5.1	Physikalisches Pendel	13
5.2	Präzessionsmessung	13
5.3	Nutationsmessung	14
	Literatur	15

1 Einleitung

In diesem Versuch soll die Bewegung eines Kreisels untersucht werden. Besonders interessant ist die Beobachtung eines Kreisels in einem Kraftfeld (z.B. dem Gravitationsfeld der Erde), da hier recht überraschende Effekte auftreten können. Ein solcher Effekt ist, dass ein herkömmlicher Spielkiesel trotz der Erdanziehung nicht umfällt, solange er nur schnell genug rotiert. Dabei kann man das Konzept eines Kreisels verallgemeinern und diese Effekte z.B. auch bei der Bewegung von Himmelskörpern nachweisen oder für technische Zwecke nutzen (Kieselkompaß, vgl. [Otten, 2003, S.160f]).

Im Versuch werden nun verschiedene Facetten dieser Kreiselbewegung genauer untersucht und mit verschiedenen Trägheitsmomenten der Anordnung in Beziehung gesetzt. Insofern ist dieser Versuch an Versuch 3 angelehnt, in dem die Natur des Trägheitsmoments experimentell untersucht wurde.

Die in dieser Arbeit verwendeten Skizzen wurden selbst erstellt.

2 Theorie

2.1 Trägheitsmoment und Satz von Steiner

Betrachtet man einen rotierenden starren Körper, so lässt sich ein *Trägheitsmoment* J um die Drehachse bestimmen. Dieses ist ein Maß für die Trägheit des Körpers bzgl. der Rotation und wie folgt definiert:

$$J = \sum m_i R_i^2 \quad (1)$$

Kennt man das Trägheitsmoment J_S des Körpers der Masse M um eine bestimmte Achse durch den Mittelpunkt, so lässt sich über den *Satz von Steiner* auch das Trägheitsmoment um jede dazu parallele Achse im Abstand h berechnen:

$$J = J_S + Mh^2$$

[Giancoli, 2010, S. 335, 342]

2.2 Physikalisches Pendel

Als physikalisches Pendel wird eine Anordnung bezeichnet, in der ein ausgedehnter Körper mit der Masse m_{ges} um eine Achse schwingt. Das Trägheitsmoment J dieses Körpers bezüglich der Drehachse lässt sich dann aus der Schwingungsdauer T berechnen [Giancoli, 2010, S. 504f]:

$$J = \frac{m_{ges} \cdot |\vec{g}| \cdot a_{cm} \cdot T^2}{4\pi^2} \quad (2)$$

Dabei bezeichnet \vec{g} die Erdbeschleunigung und a_{cm} den Abstand des Schwerpunktes vom Aufhängepunkt. Es ist zu beachten, dass diese Formel nur etwa für Winkel $< 10^\circ$ gültig ist.

2.3 Kreiselbewegung

2.3.1 Präzession eines Kreisels

Ein Spezialfall eines Kreisels ist in Abb. 1 dargestellt. An einer vertikalen Halterung ist eine Stange drehbar gelagert, an der eine Scheibe mit einem Trägheitsmoment J

(bzgl. dieser Achse) und auf der anderen Seite ein Ausgleichsgewicht befestigt ist, das gerade die an der Scheibe angreifende Gewichtskraft neutralisiert. Wird nun ein weiteres Gewicht mit der Masse m_{ZG} im Abstand a_{ZG} an der Stange befestigt, so gibt es ein resultierendes Drehmoment, welches zu einem Kippen der Anordnung führt [Demtröder, 2013, S. 61]:

$$|\vec{M}| = |\vec{a}_{ZG} \times \vec{g}| \cdot m_{ZG} = |\vec{a}_{ZG}| \cdot m_{ZG} |\vec{g}| \cdot \sin \theta \quad (3)$$

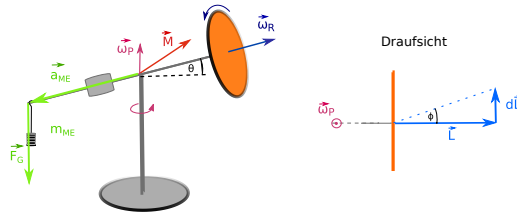


Abbildung 1: Kreiselpräzession am Beispiel einer rotierenden Scheibe

Dreht sich stattdessen die Scheibe schnell um die eigene Achse, kippt die Anordnung nicht mehr, sondern beginnt eine Rotationsbewegung in der horizontalen Ebene. Dieses Phänomen wird als (Kreisel-) *Präzession* bezeichnet. Das Drehmoment, welches durch die Gewichtskraft des zusätzlichen Massestückes hervorgerufen wird, bewirkt nach $|\vec{M}| = |\dot{\vec{L}}|$ [ebd.] eine zeitliche Änderung des Drehimpulses $d\vec{L}$. Da in diesem Fall die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe $\vec{\omega}_R$ und der Drehimpuls \vec{L} parallel sind, ist die Änderung des Drehimpulses senkrecht zu diesem. Die Spitze des Drehimpulsvektors und damit auch die Scheibe bewegen sich daher auf einer Kreisbahn [Ottens, 2003, S. 159]. Mit $|\vec{L}| = J \cdot |\vec{\omega}_R|$ [ebd., S. 145] folgt dann:

$$|\vec{M}| = \left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = \frac{J \cdot |\vec{\omega}_R| \cdot \sin \theta \cdot d\phi}{dt} \quad (4)$$

Setzt man nun 3 und 4 gleich und definiert $\omega_P := \frac{d\phi}{dt}$ als die gesuchte Präzessionsgeschwindigkeit, so lässt sich das Trägheitsmoment folgendermaßen berechnen:

$$J = \frac{m_{ZG} \cdot |\vec{g}| \cdot |\vec{a}_{ZG}|}{|\vec{\omega}_P| \cdot |\vec{\omega}_R|} \quad (5)$$

2.3.2 Nutation

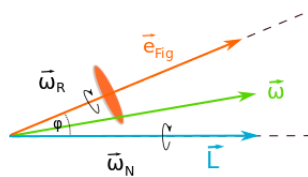


Abbildung 2: Darstellung der verschiedenen Achsen

In der bisherigen Betrachtung hat die als homogen angenommene Scheibe eine Rotation um die Symmetrieachse ausgeführt. Diese, auch als Figurenachse bezeichnete Achse zeigte dann in die gleiche Richtung wie der Drehimpulsvektor. Erfährt der rotierende Körper nun einen Stoß, so weist der Körper und damit seine Figurenachse eine Rotationsbewegung um den raumfesten Drehimpulsvektor auf [Demtröder, 2013, S. 143 ff]. Diese Bewegung wird als *Nutation* bezeichnet. Der Anteil der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ in Richtung von \vec{L} ist die Nutationswinkelgeschwindigkeit, denn die Komponente der Rotation ist stets in Richtung der Figurenachse. Somit gilt:

$$|\vec{\omega}_N| = \frac{|\vec{L}|}{J_{vert}} \quad \text{und} \quad |\vec{e}_{fig} \cdot \vec{L}| = |\vec{L}| \cos \varphi = J_{hor} \cdot |\vec{\omega}_R|$$

Nimmt man an, dass der Öffnungswinkel φ recht klein ist, so ist $\cos \varphi \approx 1$:

$$\frac{|\vec{\omega}_N|}{|\vec{\omega}_R|} = \frac{J_{hor}}{J_{vert}} \quad (6)$$

3 Durchführung

Zu Beginn werden die relevanten Längen und Massen der zum Versuchsaufbau gehörenden Objekte vermessen (s. Tab. 1). Dieser ist in Abbildung 3 dargestellt: An einem vertikalen Stativ ist eine Stange drehbar gelagert, die jedoch bei Bedarf fixiert werden kann. An dieser Stange ist eine Scheibe befestigt, die um die eigene Symmetrieachse rotieren kann. Auf der anderen Seite der Stange kann ein Ausgleichsgewicht befestigt werden, dass die Gewichtskraft der Scheibe neutralisiert.

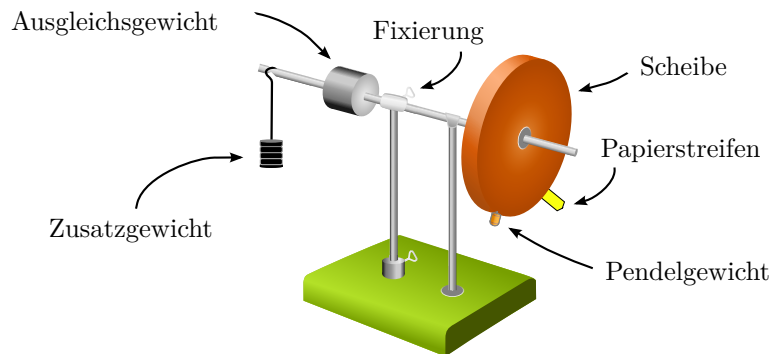


Abbildung 3: Versuchsaufbau

Physikalisches Pendel

Zunächst wird die Stange in der horizontalen Ebene so festgespannt, dass sich die Scheibe nur noch um ihre Symmetrieachse drehen kann. Dann wird am Rand der Scheibe ein kleines Pendelgewicht angebracht, sodass diese Anordnung als physikalisches Pendel betrachtet werden kann. Das Gewicht des Pendelgewichts und der Abstand dessen Massenschwerpunktes von der Drehachse sind zu bestimmen. Dann wird das Gewicht um einen kleinen Winkel aus der Ruhelage ausgelenkt, sodass die Scheibe eine harmonische Schwingung beginnt. Aus einer Messung der Periodendauer lässt sich dann das Trägheitsmoment der Scheibe bestimmen. Dazu werden

mehrere Messungen über jeweils zehn Perioden an einer und an deren diametral gegenüberliegenden Seite durchgeführt.

Funktionsweise und Benutzung der Lichtschranke

Im Folgenden wird eine Gabellichtschranke verwendet, welche eine U-Form hat. Die Funktionsweise beruht darauf, dass es einen Lichtstrahl zwischen den beiden Enden gibt. Wird dieser durch ein Hindernis unterbrochen, kann das Gerät dieses registrieren. An der Lichtschranke kann man über einen Schalter einstellen, was gemessen werden soll. In unserem Fall soll die Zeit zwischen zwei Durchgängen eines Hindernisses gemessen werden. Alternativ gäbe es zum Beispiel einen Modus, in dem die Anzahl registrierte Unterbrechnungen gezählt wird. Vor der Messung wird die Lichtschranke durch Betätigen der entsprechenden Taste auf Null gesetzt. Wird dann der Lichtstrahl mehrfach unterbrochen, so misst die Lichtschranke die verstrichene Zeit zwischen den ersten beiden Unterbrechnungen.

Präzessionsmessung

Nach der Messung wird die Einspannung entfernt und das Ausgleichsgewicht so am Stab justiert, dass sich ein Gleichgewicht in horizontaler Richtung einstellt. Ist dies der Fall, so misst man den Abstand des Ausgleichsgewichts vom Aufhängepunkt. Außerdem wird ein kleiner Papierstreifen am Mantel der Scheibe befestigt.

Nun wird die Scheibe mit Hilfe von einer aufgewickelten Schnur in schnelle Rotation versetzt. Deren Periodendauer lässt sich mit einer Lichtschranke messen, welche den Papierstreifen bei jedem Umlauf registriert. Aus der Periodendauer lässt sich die Winkelgeschwindigkeit ω bestimmen.

Dann beginnt die eigentliche Präzessionsmessung. Auf der der rotierenden Scheibe gegenüberliegenden Seite wird ein Zusatzgewicht eingehängt, sodass sich die Präzessionsbewegung einstellt. Danach wird zur Bestimmung der Präzessionsfrequenz vier mal die Dauer für jeweils einen halben Umlauf um die vertikale Achse gemessen, ohne dass die Rotation des Rades um die eigene Achse unterbrochen wird. Dabei muss vor und nach jeder Messung die Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Scheibe bestimmt werden, da diese auf Grund von Reibungseffekten im System kleiner wird. Daher ist es wichtig, die Messung zügig durchzuführen. Wenn man zum Unterbrechen der Präzessionsbewegung die Zusatzmasse nicht abhängt, sondern einfach die Stange festhält, verliert man kaum Zeit bei der Messung der Rotationsgeschwindigkeit und gewährleistet zudem, dass beim erneuten Einetzen der Präzession nur eine geringe Nutation auftritt. Die gesamte Messung wird dann noch für zwei weitere unterschiedlich schwere Zusatzgewichte wiederholt.

Nutationsmessung

Im letzten Teil des Versuchs soll die Nutationsperiode der Scheibe bestimmt werden. Dafür wird kein zusätzliches Zusatzgewicht angehängt. Die Scheibe wird erneut mit der Aufzugsschnur in eine schnelle Rotation versetzt und die Periodendauer für die Rotation wird mit der Lichtschranke gemessen. Dann gibt man der Achse der Scheibe einen kräftigen Stoß, sodass eine Nutationsbewegung einsetzt. Dessen Periodendauer wird mit der Stoppuhr bestimmt. Nach den zehn Schwingungen wird erneut die Rotationsperiode gemessen. Dieser Vorgang wird mehrmals wiederholt.

4 Auswertung

4.1 Übersicht über die vermessenen Objekte

In der folgenden Tabelle sind alle für die Auswertung benötigten Maße dargestellt. Einige dieser Größen waren als Herstellerangaben gegeben. Daher ist anzunehmen, dass diese im Vergleich zu den gemessenen Werten einen vernachlässigbar kleinen Fehler aufweisen. Alle anderen Größen wurden selbst bestimmt und es wurde ein Messfehler abgeschätzt. Bei den Abständen wurden die Massenschwerpunkte als Referenzpunkte verwendet.

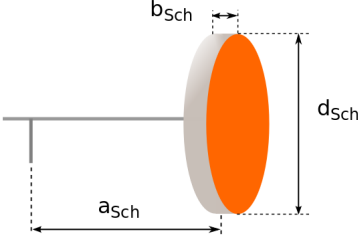
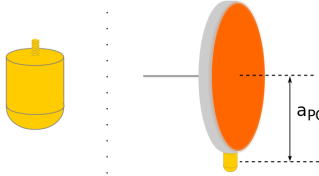
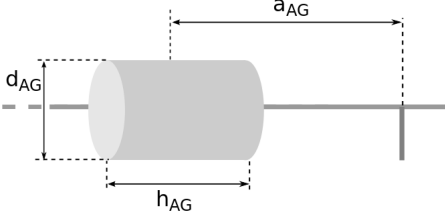
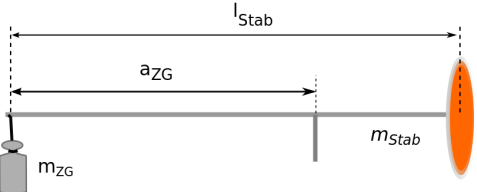
<p>Scheibe</p> <p>$m_{Sch} = 1,32 \text{ kg}$ $d_{Sch} = 24,5 \text{ cm}$ $b_{Sch} = 2,8 \text{ cm}$ $a_{Sch} = (11,7 \pm 0,6) \text{ cm}$</p>	
<p>Pendelgewicht</p> <p>$m_{PG} = 0,12 \text{ kg}$ $a_{PG} = (13,8 \pm 0,3) \text{ cm}$</p>	
<p>Ausgleichsgewicht</p> <p>$m_{AG} = 0,938 \text{ kg}$ $d_{AG} = (6 \pm 0,1) \text{ cm}$ $h_{AG} = (4,3 \pm 0,1) \text{ cm}$ $a_{AG} = (16,5 \pm 0,3) \text{ cm}$</p>	
<p>Zusatzgewicht</p> <p>m_{ZG} variabel $a_{ZG} = (28,3 \pm 0,8) \text{ cm}$</p> <p>Stab</p> <p>$m_{Stab} = (500 \pm 300) \text{ g}$ $l_{Stab} = (40,0 \pm 0,5) \text{ cm}$</p>	

Tabelle 1: Maße und Längen der verwendeten Objekte

Für Längenmessungen unter 10 cm wird ein Fehler von 1 mm, dem kleinsten Skalenwert, einkalkuliert. Bei den zu messenden Längen, die über 10 cm hinausgehen, konnte man nicht immer das Lineal eben anlegen und es hing durch, somit wird hier ein um 2 mm größerer Fehler einkalkuliert. Bei der Gesamtlänge des Stabes wird ein Fehler von 5 mm angenommen, da hier das Lineal noch schlechter angelegt werden konnte.

Die Abstände der Scheibe und des Zusatzgewichts zum Unterstützungspunkt wurden jedoch nicht gemessen, da dies nicht explizit aus der Praktikumsanleitung hervorgeht. Man kann diese Größen jedoch indirekt aus bekannten Größen bestimmen. Mit der Information, dass das Ausgleichsgewicht so justiert wurde, dass es kein von der Gravitationskraft verursachtes Drehmoment gibt, kann über das Hebelgesetzes die Länge a_{Sch} berechnet werden:

$$\begin{aligned}\Delta a_{Sch} &= \frac{m_{AG}}{m_{Sch}} \cdot \Delta a_{AG} \approx 0,003m \\ a_{Sch} &= \frac{m_{AG}}{m_{Sch}} \cdot a_{AG} \pm \Delta a_{Sch} = (11,7 \pm 0,6) \text{ cm}\end{aligned}$$

Dabei wird jedoch die Masse des Stabes nicht berücksichtigt, daher wird der Fehler doppelt so groß abgeschätzt, wie sich aus der Fehlerfortpflanzung ergeben würde. Der Abstand des Zusatzgewichts lässt sich dann nach $a_{ZG} = l_{Stab} - a_{Sch}$ bestimmen, der Fehler ergibt sich aus der Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta a_{ZG} = \sqrt{\Delta l_{Stab}^2 + \Delta a_{Sch}^2} \approx 0,8 \text{ cm}$$

Außerdem wird in der Auswertung die Masse des Stabes benötigt. Diese ließ sich im Versuch nicht bestimmen, ohne dass die gesamte Versuchsanordnung auseinander genommen worden wäre. Da dies nicht vorgesehen war, kann die Masse lediglich grob mit $m_{Stab} = (500 \pm 300) \text{ g}$ abgeschätzt werden.

Aus den einzelnen Messungen kann man nun das horizontale Trägheitsmoment der Scheibe um die Symmetrieachse sowie das vertikale Trägheitsmoment der gesamten Anordnung um den Aufhängepunkt auf unterschiedliche Art und Weise bestimmen. Aus der Form und Masse der einzelnen Objekte können die beiden Trägheitsmomente theoretisch bestimmt werden, aus den dynamischen Messungen der Pendel-, Präzessions- und Nutationsbewegung empirisch. Natürlich werden zur theoretischen Bestimmung auch Messwerte verwendet, aber diese beruhen nur auf statischen Messungen. Da das Trägheitsmoment eigentlich eine Größe ist, die eine dynamische Bedeutung hat, wurde hier dennoch der Begriff „theoretisch“ verwendet.

4.2 Theoretische Bestimmung der Trägheitsmomente

Der Wert des *horizontalen Trägheitsmoments* der Scheibe um ihre Symmetrieachse lässt sich unter der Annahme, dass die verwendeten Werte keinen signifikanten Fehler aufweisen, aus der Form und der Masse der Objekte berechnen [Stöcker, 2005, S. 103f]:

$$\begin{aligned}J_{hor}^{theo} &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,32 \text{ kg} \cdot (12,25 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 \\ &\approx \underline{\underline{9,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}}\end{aligned}\tag{7}$$

Neben dem horizontalen Trägheitsmoment kann man für den Kreisel auch noch ein *vertikales Trägheitsmoment* um die Präzessionsachse berechnen. Dieses ist nach Gl. 1 die Summe der Teilträgheitsmomente der einzelnen Massen. In der Rechnung für die Scheibe und das Ausgleichsgewicht werden die Formel für das Trägheitsmoment eines Vollzylinders, der um seine Querachse rotiert sowie der Satz vom Steiner benutzt. Für den Stab wurde die Formel für das Trägheitsmoment eines um die Spitze rotierenden dünnen Stabes verwendet. Diese Formeln wurden aus einem Nachschlagewerk entnommen [Stöcker, 2005].

$$J_{AG} = m_{AG} \cdot \left(\frac{r_{AG}^2}{4} + \frac{h^2}{12} + a_{AG}^2 \right) \approx 26 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_{Sch} = m_{Sch} \cdot \left(\frac{r_{Sch}^2}{4} + \frac{b_{Sch}^2}{12} + a_{Sch}^2 \right) \approx 23 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_{Stab} = \frac{m_{Stab}}{3l_{Stab}} \cdot (a_{Sch}^3 + a_{ZG}^3) \approx 11 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\begin{aligned} (\Delta J_{vert}^{theo})^2 &= \left(\frac{m_{AG} r_{AG}}{2} \cdot \Delta r_{AG} \right)^2 + \left(\frac{m_{AG} h_{AG}}{6} \cdot \Delta h_{AG} \right)^2 + (2m_{AG} a_{AG} \cdot \Delta a_{AG})^2 \\ &+ \left(\left(2a_{Sch} m_{Sch} + \frac{m_{Stab} a_{Sch}^2}{l_{Stab}} \right) \cdot \Delta a_{Sch} \right)^2 + \left(\frac{m_{Stab} a_{ZG}^2}{l_{Stab}} \cdot \Delta a_{ZG} \right)^2 \\ &+ \left(\frac{m_{Stab}}{3l_{Stab}^2} (a_{Sch}^3 + a_{ZG}^3) \cdot \Delta l_{Stab} \right)^2 + \left(\frac{a_{Sch}^3 + a_{ZG}^3}{3l_{Stab}} \cdot \Delta m_{Stab} \right)^2 \\ &\approx (2 \cdot 10^{-10} + 5 \cdot 10^{-11} + 9 \cdot 10^{-7} + 4 \cdot 10^{-6} + 7 \cdot 10^{-7} + 2 \cdot 10^{-8} \\ &+ 4 \cdot 10^{-5}) \text{ kg m}^2 \approx (5 \cdot 10^{-5}) \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J_{vert}^{theo} &= J_{AG} + J_{Sch} + J_{Stab} + \Delta J_{vert}^{theo} \\ &= \underline{\underline{(60 \pm 8) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}} \end{aligned}$$

4.3 Empirische Bestimmung der Trägheitsmomente

Nun werden die Bewegungsmessungen ausgewertet. In den Versuchsteilen Physikalisches Pendel und Präzessionsmessung wird das horizontale Trägheitsmoment bestimmt, in der Nutationsmessung das vertikale.

4.3.1 Physikalisches Pendel

Um aus dem Pendelversuch das horizontale Trägheitsmoment zu bestimmen, wird die Periodendauer des physikalischen Pendels benötigt. Der im Experiment ermittelte Wert ist $T_{Messung} = (1,668 \pm 0,013) \text{ s}$. Um ein Vertrauensintervall für den wahren Fehler zu erhalten, muss die Standardabweichung um den Term $\frac{t}{\sqrt{n}}$ korrigiert werden. Der Faktor t hängt von der Anzahl der Wiederholungen und dem gewünschten Signifikanzniveau ab (hier: 1σ -Umgebung). Außerdem muss der systematische Fehler der Stoppuhr berücksichtigt werden. Dieser ist abhängig von der gemessenen Gesamtzeit. Da jedoch die gemessenen Zeiten sehr ähnlich waren, ist der systematische Fehler etwa konstant, somit wird hier für alle Werte der gleiche Stoppuhr-Fehler (größter Einzelfehler) verwendet:

$$\Delta T_{stat} = \sigma_{T_{Messung}} \cdot \frac{t}{\sqrt{n}} = 0,013 \cdot \frac{1,15}{\sqrt{6}} \text{ s} \approx 0,007 \text{ s}$$

$$\Delta T_{sys} = 0,01 + 0,005 \cdot 1,687 \text{ s} \approx 0,02 \text{ s}$$

$$\Rightarrow T_{emp} = (1,67 \pm 0,03) \text{ s}$$

Das Trägheitsmoment der Scheibe lässt sich nun aus Gl. 2 berechnen, wenn man das Trägheitsmoment des Pendelgewichts abzieht. Setzt man für a_{cm} die Formel für den Schwerpunkt ein [Giancoli, 2010, S. 297], so ergibt sich:

$$J_{hor}^{emp} = \frac{g \cdot m_{PG} \cdot a_{PG} \cdot T_{emp}^2}{4\pi^2} - m_{PG} \cdot a_{PG}^2 \pm \Delta J_{hor}^{emp}$$

Mit den gegebenen Werten und deren Fehlern lässt sich nun das Trägheitsmoment berechnen:

$$\begin{aligned} (\Delta J_{hor}^{emp})^2 &= \left(\frac{\partial J_{hor}^{emp}}{\partial a_{PG}} \cdot \Delta a_{PG} \right)^2 + \left(\frac{\partial J_{hor}^{emp}}{\partial T_{emp}} \cdot \Delta T_{emp} \right)^2 \\ &= \left(\frac{g m_{PG} T_{emp}^2}{4\pi^2} - 2 m_{PG} a_{PG} \right)^2 (\Delta a_{PG})^2 + \left(\frac{g m_{PG} a_{PG} T_{emp}}{2\pi^2} \Delta T_{emp} \right)^2 \\ &\approx 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J_{hor}^{emp} = \underline{\underline{(9,2 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}} \quad (8)$$

4.3.2 Präzessionsmessung

Bei der Präzessionsmessung wurden die Präzessionswinkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_P$ und die Rotationswinkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_R$ indirekt aus den entsprechenden Umlaufzeiten mehrfach bestimmt, sodass diese Größen in der Auswertung zueinander in Beziehung gesetzt werden können.

Da die Präzessionsbewegung durch Reibung recht stark abgebremst wird, wurde sowohl vor als auch nach jedem halben Präzessionsumlauf die Periodendauer für die Rotation des Kreisels um die horizontale Achse bestimmt. In der Auswertung dieser Messung ist daher für jeden dieser halben Umläufe die Präzessionsdauer dem Mittelwert der beiden Rotationszeiten gegenübergestellt. Da die gemessenen Größen bei jeder Einzelmessung variieren, wird der Fehler abgeschätzt. Die Rotationszeit um die vertikale Achse wurde mit einer Stoppuhr gemessen, somit muss der Stoppuhr-Fehler mit einbezogen werden [vgl. Kapitel 4.3.1]. Außerdem konnte man nur an Hand von recht ungenauen Vergleichspunkten abschätzen, wann ein halber Umlauf vorüber ist. Es ist gut möglich, hier um 10-20° von den 180° abzuweichen. Daher wird der angenommene Fehler um $\frac{1}{10} \cdot T_P$ erhöht. Im Vergleich dazu kann der Fehler der Lichtschranke bei der Rotationsmessung um die horizontale Achse als gering angenommen werden, da hier Faktoren wie menschliche Reaktion und Ermessen entfallen. Da jedoch auch in der Lichtschranke eine Stoppuhr integriert ist, wird auch hier ein Stoppuhr-Fehler angenommen. Die Periodendauern werden über die Definition $\omega = \frac{2\pi}{T}$ [Giancoli, 2010, S. 326] in Winkelgeschwindigkeiten umgerechnet. Mittels Gauß'scher Fehlerfortpflanzung lassen sich daraus die Fehler der Winkelgeschwindigkeiten bestimmen:

$$\Delta\omega_P = \frac{2\pi}{T^2} \cdot \Delta T \quad \text{und} \quad \Delta\omega_R^{-1} = \frac{\Delta T}{2\pi}$$

Da nach Gl. 5 eine Antiproportionalität zwischen diesen beiden Größen zu erwarten ist, wird ω_P gegen das reziproke ω_R aufgetragen. Diese Daten werden durch gnuplot mit linearer Regression unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Einzelfehler ausgewertet. Die grafische Darstellung der Messwerte sowie die Resultate der Regression sind in Abb. 4 abgebildet.

Mit den in Tabelle 2 aufgeführten Werten für die Steigung $k \approx \omega_R \cdot \omega_P$ (wg. Proportionalität) der jeweiligen Regressionsgeraden und Gl. 5 lässt sich dann für

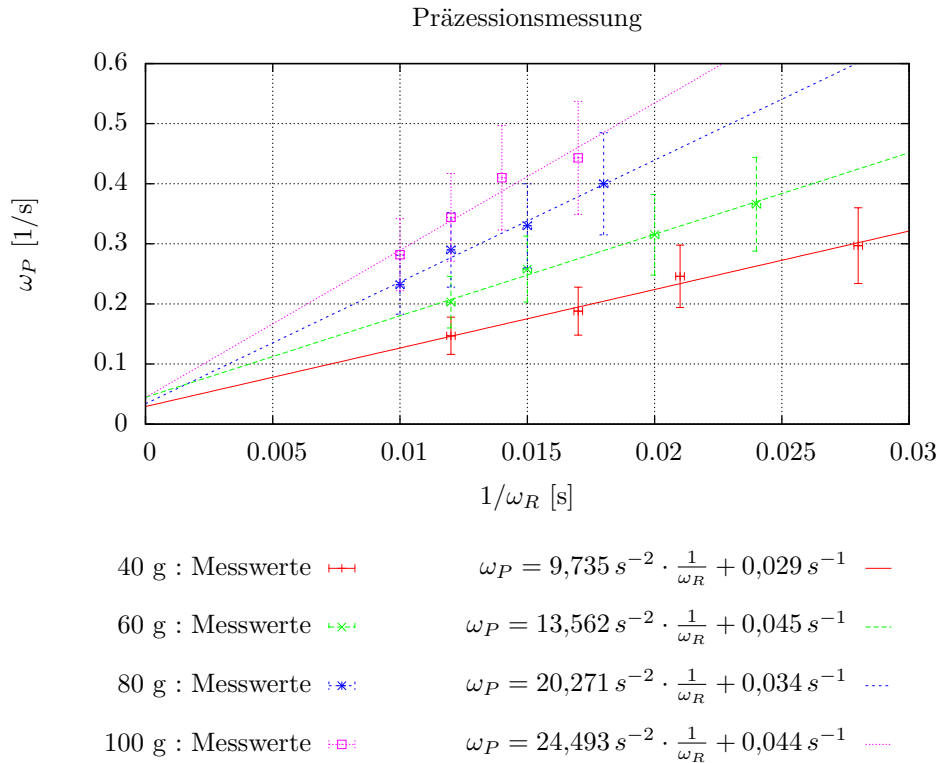


Abbildung 4: Gegenüberstellung von ω_P und $\frac{1}{\omega_R}$ für verschiedene Massen sowie Ergebnisse der Linearen Regression

jede Teilmessung mit unterschiedlicher Masse das Trägheitsmoment bestimmen:

$$J = \frac{m_{ZG} \cdot g \cdot a_{ZG}}{k}$$

$$(\Delta J)^2 = \left(\frac{m_{ZG} \cdot g}{k} \cdot \Delta a_{ZG} \right)^2 + \left(\frac{m_{ZG} \cdot g \cdot a_{ZG}}{k^2} \Delta k \right)^2$$

Da nach der Fehlerfortpflanzung der Fehler bei allen Messungen als gleich groß angenommen wird, kann einfach der ungewichtete Mittelwert berechnet werden.

$$\Rightarrow \underline{J_{hor2}^{emp} = (12 \pm 4) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

Dieser Wert für das horizontale Drehmoment ist in der gleichen Größenordnung wie die beiden Werte in Gl. 7 und 8, jedoch etwa 20% größer. Da aber auch ein recht großer Fehler für den dritten, am stärksten abweichenden Wert angenommen wird, liegen die anderen beiden Werte dennoch im Vertrauensintervall.

Masse m [g]	k [s^{-2}]	Δk [s^{-2}]	J_{hor} [kg] · m ²	ΔJ_{hor} [kg · m ²]
40	9,7	0,9	0,011	0,004
60	14	1	0,012	0,004
80	20	2	0,011	0,004
100	24	4	0,012	0,004

Tabelle 2: Trägheitsmoment bei verschiedenen gnuplot-Regression

4.3.3 Nutationsmessung

Im letzten Teil wurde die Kreisfrequenz ω_R in Abhängigkeit von der Nutationsfrequenz ω_N gemessen. Der Fehler bei der Messung der Rotationszeit wurde analog zu Kapitel 4.3.2 abgeschätzt, für die Nutationszeit wurde der Stoppuhr-Fehler sowie ein Reaktionsfehler von 0,3 s einkalkuliert.

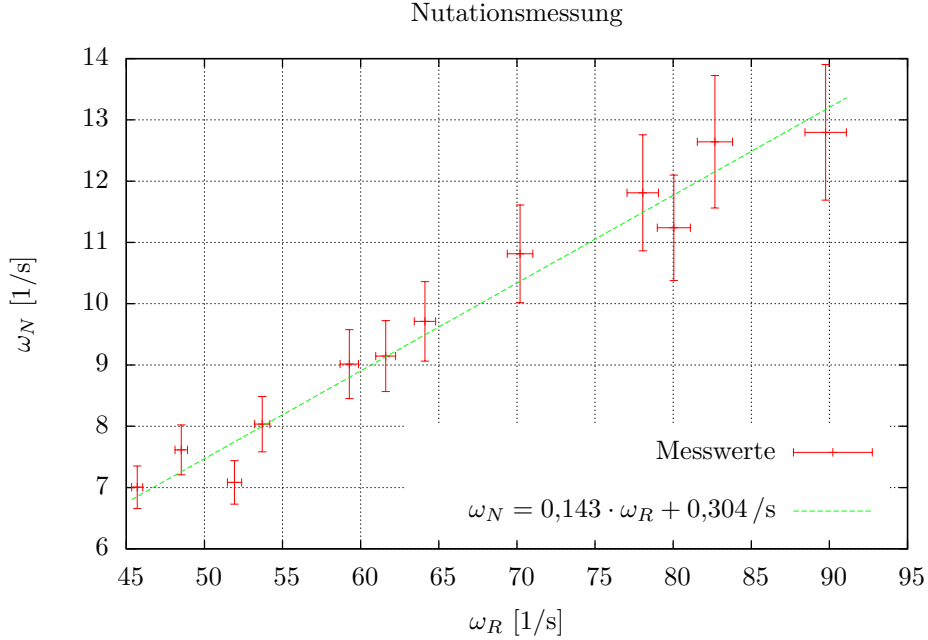


Abbildung 5: Gegenüberstellung von Nutationsfrequenz und Kreisfrequenz

In der Darstellung der Messergebnisse in Abb. 5 ist deutlich der lineare Zusammenhang zwischen den beiden Größen zu erkennen. Bis auf einen Ausreißer schneiden alle Werte mit ihren Fehlerbalken die Ausgleichsgerade. Der Wert der Steigung der Regressiongeraden beträgt $k = 0,143 \pm 0,011$ (zwei Dezimalstellen wegen führender 1). Nach Gleichung 6 sollte dieser Wert in guter Näherung dem Verhältnis $\frac{J_{hor}}{J_{vert}}$ der beiden Hauptträgheitsmomente entsprechen. Somit lässt sich aus dieser Messung auch das vertikale Trägheitsmoment empirisch bestimmen. Als Wert für das horizontale Trägheitsmoment verwende ich das arithmetische Mittel der beiden empirischen Werte.

$$(\Delta J_{vert}^{emp})^2 = \left(\frac{J_{hor}^{emp1}}{2 \cdot k} \Delta J_{hor2}^{emp} \right)^2 + \left(\frac{J_{hor2}^{emp}}{2 \cdot k} \Delta J_{hor}^{emp1} \right)^2 + \left(\frac{J_{hor}^{emp1} + J_{hor2}^{emp}}{2k^2} \Delta k \right)^2$$

$$J_{vert}^{emp} = \frac{J_{hor}^{emp1} + J_{hor2}^{emp}}{2 \cdot k} \pm \Delta J_{vert}^{emp}$$

Setzt man nun die Werte in diese Formel ein, so erhält man für das Trägheitsmoment:

$$\Rightarrow J_{vert}^{emp} = \underline{\underline{(71 \pm 6) 10^{-3} \text{ kg m}^2}}$$

5 Diskussion

J_{hor}^{theo}	=	$9,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	
J_{vert}^{theo}	=	$(60 \pm 8) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	
J_{hor}^{emp}	=	$(9,2 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	(physikalisches Pendel)
J_{hor2}^{emp}	=	$(12 \pm 4) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	(Präzessionsmessung)
J_{vert}^{emp}	=	$(71 \pm 6) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	(Nutationsmessung)

Tabelle 3: Übersicht über die Ergebnisse

5.1 Physikalisches Pendel

Der theoretisch berechnete Wert für das horizontale Trägheitsmoment stimmt recht gut mit dem empirischen überein, die Abweichung beträgt nur etwa 5%. Dennoch liegt der theoretische Wert nicht im Vertrauensintervall (1σ) des empirischen, das sich aus der Fehlerrechnung ergibt. Es ist zu vermuten, dass an dieser Stelle ein systematischer Fehler vorliegt, der in der Fehlerbetrachtung nicht berücksichtigt wurde. Nun kann man nicht abschließend sagen, was die Ursache ist und welcher der beiden Werte näher am wahren liegt. Die Größenangaben, die für den theoretischen Wert benötigt wurden, waren zwar weniger fehlerbehaftet, jedoch weiß man nicht, wie gut die reale Scheibe dem theoretischen Modell eines Vollzylinders mit homogener Massenverteilung nahekommt. So gibt es z.B. die Vorrichtung für das Befestigen und Aufrollen der Schnur, welche eine andere Größe als die Scheibe hat und von der man nicht weiß, ob ihre Masse zur Masse der Scheibe hinzugerechnet wurde. Andererseits hat man bei der empirischen Bestimmung größere Messungenauigkeiten. Ein systematischer Fehler könnte hier sein, dass das Pendel zu weit ausgelenkt wurde, sodass die Sinus-Näherung nicht mehr so gut erfüllt ist, denn diese Abweichung wäre stets in die gleiche Richtung.

5.2 Präzessionsmessung

Der erwartete lineare Zusammenhang ist in Abb. 4 deutlich zu erkennen. Der relative Fehler für die Steigung beträgt im Mittel etwa 10% (vgl. Tabelle 2) und bewegt sich somit in einem akzeptablen Rahmen. Auffällig ist jedoch, dass die Werte für den y-Achsenabschnitt bei der linearen Regression nicht mehr oder weniger gleichmäßig um Null verteilt sind, sondern stattdessen für alle vier Massenstücke positiv und in einer ähnlichen Größenordnung sind. Auf Grund der erwarteten Proportionalität sollten die Regressionsgeraden eigentlich im Mittel durch den Ursprung verlaufen. Daher kann an dieser Stelle ein systematischer Fehler vermutet werden. Möglicherweise ist diese Abweichung während der Zeitmessung entstanden. Es könnte sein, dass entweder alle Präzessionswinkelgeschwindigkeiten mehr oder weniger um den gleichen Betrag zu groß sind, oder aber dass die Kehrwerte der Rotationsgeschwindigkeiten um den gleichen Betrag zu klein sind, was wiederum bedeuten würde, dass die Zeitmessungen in eine bestimmte Richtung abweichen und die absolute Abweichung bei größeren Zeiten größer ist. Neben Gerätefehlern oder Bedienungsfehlern könnte aber auch der Einfluss der Reibung eine Ursache sein. Nimmt man an, dass die Winkelgeschwindigkeit proportional zur Reibung ist, so fällt diese als Konsequenz der Reibung exponentiell ab. Das bedeutet, dass der Mittelwert der Winkelgeschwindigkeit in einem bestimmten Zeitintervall eigentlich geringer ist, als das arithmetische Mittel aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit. Diese Abweichung sollte für kleinere

Geschwindigkeiten abnehmen, da sich die Krümmung der Geschwindigkeitskurve immer weniger stark ändert. Somit ist der Fehler, der durch die Reibung verursacht wird, auf jeden Fall ein systematischer, da die Abweichung vom Realwert immer in die gleiche Richtung erfolgt. Auf Grund der Vielzahl an möglichen Ursachen und der Tatsache, dass sowohl x-Wert als auch y-Wert fehlerbehaftet sind und die Winkelgeschwindigkeiten indirekt über die Periodendauern gemessen wurden, kann hier keine Entscheidung über die tatsächliche Ursache getroffen werden. Es ist auch möglich, dass mehrere dieser Ursachen zusammen auftreten.

An dieser Stelle ist noch anzumerken, dass es sich lohnt, einen Blick auf die Ergebnisse zu werfen, die man erhält, wenn nur die Quotienten berechnet werden, ohne einen y-Achsenabschnitt anzunehmen. Der systematische Fehler wird hierbei gewissermaßen ausgeblendet, die Steigung ist für alle Punkte etwas größer. Die daraus berechneten Trägheitsmomente liegen noch sehr viel näher an den anderen Werten (vgl. Tabelle 4). Die Fehlerrechnung verläuft ebenfalls analog, lediglich wird statt dem k der Mittelwert der einzelnen Produkte $\omega_R \omega_P$ verwendet.

$Masse\ m\ [g]$	$\omega_R \omega_P\ [s^{-2}]$	$\Delta \omega_R \omega_P\ [s^{-2}]$	$J_{hor}\ [kg \cdot m^2]$	$\Delta J_{hor}\ [kg \cdot m^2]$
40	11,2	0,6	0,010	0,003
60	16,4	0,9	0,010	0,003
80	22,6	1,2	0,010	0,003
100	28,0	1,5	0,010	0,003

Tabelle 4: Trägheitsmoment bei verschiedenen Massen: direkte Betrachtung der Antiproportionalität

5.3 Nutationsmessung

In der Auswertung wurde das vertikale Trägheitsmoment auf zwei Arten bestimmt. Zuerst wurde es theoretisch aus der Versuchsanordnung berechnet, später aus einer Messung der Nutationsbewegung. Diese beiden Werte liegen etwa in der gleichen Größenordnung, weichen aber um etwa 15% voneinander ab. Jedoch müssen auch jeweils recht große Fehler angenommen werden, sodass sich die Vertrauensintervalle dennoch überschneiden (bei $J \approx 66\text{ kg m}^2$).

Es entstanden dann Fehler beim Messen, weil bei kleinen Nutationswinkeln große Umdrehungsfrequenzen auftraten und es somit schwierig war, volle Umläufe zu erkennen und im richtigen Moment zu messen. Bei größeren Winkeln ist dies zwar einfacher, jedoch gibt es dann einen größeren Fehler bei der Verwendung von Gl. 6. Für die theoretische Bestimmung des vertikalen Trägheitsmomentes mussten einige Werte indirekt abgeleitet werden und sind somit recht ungenau. Hier hätte man ein genaueres Ergebnis erhalten, wenn die Abstände der Scheibe und des Zusatzgewichts vom Unterstützungspunkt direkt gemessen worden wären und ein genauerer Wert für die Masse des Stabes vorgegeben wäre. Vielleicht kann die Praktikumsanleitung um den Hinweis ergänzt werden, dass auch diese Maße benötigt werden, denn alle anderen zu bestimmenden Größen werden explizit erwähnt.

Literatur

Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 1*. Springer Spektrum, 2013.

Douglas C. Giancoli. *Physik Lehr- und Übungsbuch*. Pearson Deutschland GmbH, Martin-Kollar-Straße 10-12, 81829 München, 2010.

Ernst Wilhelm Otten. *Repititorium Experimentalphysik: für Vordiplom und Zwischenprüfung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

Horst Stöcker. *Taschenbuch der Physik*. H. Deutsch, 2005.