



VERSUCH 9

DIFFUSION

Praktikant:

Tobias Wegener

Alexander Osterkorn

E-Mail:

tobias.wegener@stud.uni-goettingen.de

a.osterkorn@stud.uni-goettingen.de

Tutor:

Marten Düvel

Gruppe:

3

Durchgeführt am:

3.6.2013

Protokoll abgegeben:

17.6.2013

Testiert:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Diffusion	3
2.2	Ficksche Gesetze	3
2.3	Wheatstonesche Brückenschaltung	4
3	Durchführung	4
3.1	Versuchsaufbau	4
3.2	Durchführung der Messung	4
3.2.1	Justierung des Strahlengangs	4
3.2.2	Konzentrationsmessungen	5
4	Auswertung	7
4.1	Interpretation der Messung	7
4.2	Bestimmung des Diffusionskoeffizienten	7
4.3	Konzentrationsprofil	9
5	Diskussion	12
5.1	Bestimmung des Diffusionskoeffizienten	12
5.2	Konzentrationsprofil	12
	Literatur	12

1 Einleitung

In diesem Versuch werden mehrere Messungen zum physikalischen Phänomen der Diffusion durchgeführt. Dabei werden zwei Flüssigkeiten übereinander geschichtet und ihre eigenständige Vermischung über einen längeren Zeitraum analysiert.

2 Theorie

2.1 Diffusion

Unter *Diffusion* versteht man im Allgemeinen den von selbst ablaufenden Ausgleich von Konzentrationsunterschieden innerhalb einer Mischung mehrerer Stoffe. Die beteiligten Stoffe sind normalerweise in flüssiger oder gasförmiger Phase.

Prinzipiell beruht die Diffusion aus der ungeordneten thermischen (“brownschen”) Bewegung der Moleküle oder Atome in den Stoffen. In Regionen mit einer höheren Teilchendichte bewegen sich mehr Teilchen in Regionen mit niedrigerer Teilchendichte als andersherum. So findet ein Konzentrationsausgleich statt.

2.2 Ficksche Gesetze

Mathematisch beschrieben wird die Diffusion durch die beiden *Fickschen Gesetze*. Betrachtet man einen Stoff (z.B. einen Farbstoff), der in einem anderen (z.B. Wasser) gelöst ist, so lässt sich dessen Konzentration durch eine inhomogene Funktion $n(\vec{x})$ des Ortes \vec{x} beschreiben, die eine Teilchendichte repräsentiert.

Wie oben erwähnt, stellt sich bei ungleicher Konzentration ein Diffusionsstrom ein, der durch ein Stromdichtefeld $\vec{j}(\vec{x})$ beschrieben werden kann. Nach dem *ersten Fickschen Gesetz* [Kurzweil, 2009, S. 151] ist die Stromdichte proportional zur Änderung der Teilchendichte:

$$\vec{j}(\vec{x}) = -D \cdot \nabla n(\vec{x}) \quad (1)$$

Die Proportionalitätskonstante D wird *Diffusionskonstante* genannt. Kombiniert man diese Gleichung mit der Kontinuitätsgleichung [ebd.]

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}) = -\frac{\partial n}{\partial t},$$

so erhält man das *zweite Ficksche Gesetz* [ebd.], das auch *allgemeine Diffusionsgleichung* genannt wird:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \cdot (\nabla \cdot \nabla n(\vec{x})) = D \cdot \Delta n \quad (2)$$

Für diesen Versuch ist eine Lösung der Diffusionsgleichung für zwei übereinander geschichtete Flüssigkeiten von Interesse. Dabei übernimmt die Konzentration $c(x, t)$ der oberen Flüssigkeit die Rolle der Teilchendichte n . t ist die zeitliche Abhängigkeit und x die Entfernung der Diffusionsfront von der “Startlinie”. Man erhält folgende Lösung¹:

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right) \quad (3)$$

Dabei ist c_0 die Konzentration zur Zeit $t = 0$ an der Startlinie. $\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-v^2) dv$ ist die Gaußsche Fehlerfunktion.

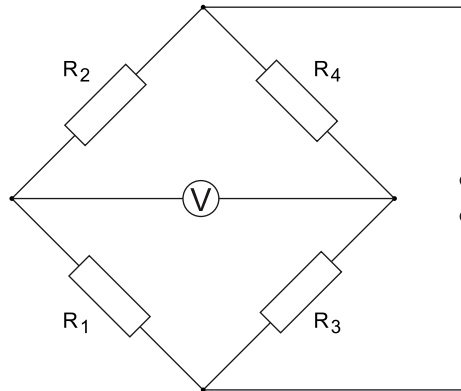


Abbildung 1: Wheatstonesche Brückenschaltung (von <http://lp.uni-goettingen.de/get/text/3665>)

2.3 Wheatstonesche Brückenschaltung

Die Wheatstonesche Brückenschaltung ist durch Abb. 1 gegeben. Wenn der Fotowiderstand der Widerstand R_1 ist und R_1, R_2, R_3 bekannt sind, dann gilt [Demtröder, 2013, S. 56]

$$R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4}$$

und damit lässt sich R_1 praktisch durch Annullierung der Diagonalspannung messen.

3 Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

Die Versuchsanordnung ist in Abb. 2 dargestellt. Licht aus einer Quecksilberdampf-lampe wird mit einer Linse fokussiert und passiert dann eine mit einer Flüssigkeit gefüllte Küvette. Die Höhe der Küvette lässt sich variieren. Bei der Flüssigkeit handelt es sich um eine Übersichtung aus destilliertem Wasser und Metyhlenblau. Ein Teil des Lichts, der die Küvette passiert hat, fällt durch einen Spalt auf einen Photowiderstand. Dieser ist dadurch charakterisiert, dass der Widerstand von der Intensität des einfallenden Lichts abhängt. Mit einer Wheatstone'schen Brückenschaltung kann der Betrag dieses Widerstandes bestimmt werden. Mit dieser Anordnung lässt sich also feststellen, wie viel Licht die Flüssigkeit durchdringt. Da die in diesem Versuch verwendete Flüssigkeit ein Gemisch aus Wasser (kaum Lichtabsorption) und Methylenblau (starke Absorption) ist, kann über die Widerstandsmessung die Konzentration von Methylenblau im Wasser bestimmt werden.

3.2 Durchführung der Messung

3.2.1 Justierung des Strahlengangs

Zunächst wird das Licht der Lampe mit maximaler Intensität auf den Photowiderstand abgebildet. Dazu ist es unter Umständen notwendig, die Positionen der Linse

¹z.B. nach <http://lp.uni-goettingen.de/get/text/3665>

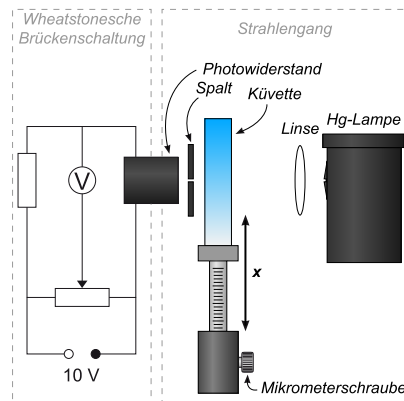


Abbildung 2: Versuchsaufbau

und des Photowiderstands relativ zur Lichtquelle zu variieren, um ein möglich scharfes Bild des Spalts zu bekommen. Dann wird ein Graufilter ($c_0/16$) im Strahlengang positioniert und das Potentiometer in der Wheatstone'schen Brückenschaltung so eingestellt, dass der gemessene Strom Null ist. Auf diese Weise wird die Anordnung so geeicht, dass bei einem verschwindenden Strom die Konzentration der Flüssigkeit in der Küvette gerade so groß ist, dass der Anteil des absorbierten Lichts gerade so groß ist wie beim $c_0/16$ -Filter.

3.2.2 Konzentrationsmessungen

1. Messung 1 des Konzentrationsverlaufs $c_0/16$
 Eine Küvette wird zu etwa $\frac{3}{4}$ mit destilliertem Wasser und $\frac{1}{4}$ mit Ethylenblau gefüllt und in den Strahlengang gestellt. Da die Flüssigkeiten nun beginnen zu diffundieren, ändert sich die lokale Konzentration. Da sich die Höhe der Küvette verstellen lässt, kann sie nun so lange variiert werden, bis das Licht eine Stelle in der Küvette passiert, an der die Absorption wie im Filter ist. Diese Höhe soll nun über einen Zeitraum von 30 Minuten im 30 Sekunden-Rhythmus gemessen werden.
2. Messung 2 des Konzentrationsverlaufs $c_0/32$
 Die Küvette aus Messung 1 wird vorsichtig an die Seite gestellt, da sie später noch einmal benötigt wird. Mit einer zweiten Küvette wird die Messung von Versuch 1 wiederholt, jedoch wird hier zuvor die Schaltung mit einem $c_0/32$ -Filter eingestellt.
3. Messung 3 des Konzentrationsprofils nach 40 Minuten: Nachdem in den ersten beiden Messungen bestimmt werden sollte, wie sich ein bestimmter Konzentrationswert mit der Zeit in der Flüssigkeit ausbreitet, soll nun das Konzentrationsprofil der Flüssigkeit bei annähernd konstanter Zeit bestimmt werden. Dazu wird 40 Minuten nach Beginn von Messung 2 für jeden der verfügbaren Graufilter zunächst die Messbrücke abgeglichen und danach die Höhe gemessen, in der die Konzentration dem zugehörigen Filter entspricht. Diese Messung soll für jeden Filter insgesamt zweimal durchgeführt werden (zunächst aufsteigend von $c_0/2$ bis $c_0/32$, dann absteigend von $c_0/32$ bis $c_0/2$). Für manche Filter kann diese Messung schlussendlich nicht durchgeführt werden, da das Potentiometer nicht den Widerstandswert annehmen kann, der nötig wäre, damit der Strom verschwindet.
4. Messung 4 des Konzentrationsprofils nach 100 Minuten: Zuletzt wird Messung

3 mit der ersten Küvette wiederholt. Die Messung soll 100 Minuten nach Beginn der Messung 1 erfolgen.

4 Auswertung

4.1 Interpretation der Messung

In Abb. 3 sind Diffusionskurven aufgetragen, die nach Gl. 3 für verschiedene Zeiten berechnet wurden. Eine solche Kurve stellt dar, wie das Konzentrationsprofil in einem Flüssigkeitsgemisch zum Zeitpunkt t ist. Dabei wird angenommen, dass dieser Diffusionsprozess ideal verläuft, das heißt dass es keine äußeren Einflüsse darauf gibt. Diejenige Stelle, an der sich zu Beginn des Prozesses die Grenzschicht zwischen beiden Flüssigkeiten befunden hat, sollte im Folgenden aus Symmetriegründen stets eine Konzentration von $\frac{c}{c_0} = 0,5$ aufweisen.

In den Messungen (3) und (4) bewegt man sich also gerade entlang einer solchen Kurve (zum entsprechenden Zeitpunkt t). In den Messungen (1) und (2) wurde die Ausbreitung eines bestimmten Konzentrationswertes in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit t bestimmt. In dem Diagramm entspricht dies somit einer Bewegung entlang derjenigen Parallelen zur Abzisse, welche die y-Achse gerade bei diesem Konzentrationswert schneidet.

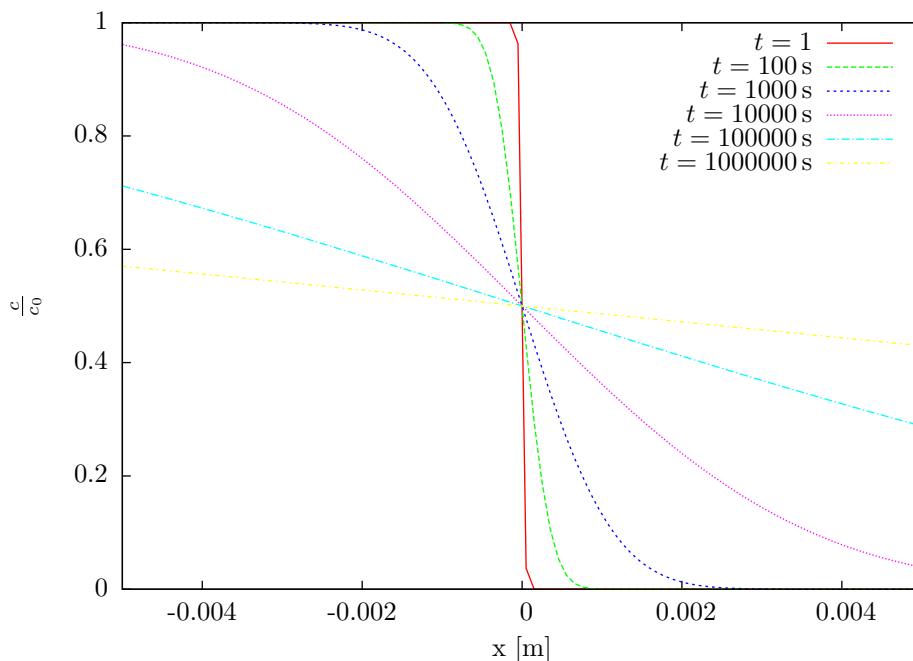


Abbildung 3: Diffusionskurven für verschiedene Messzeiten

4.2 Bestimmung des Diffusionskoeffizienten

Die beiden Diagramme 4 und 5 zeigen die quadratische Diffusionsstrecke x^2 gegen die Diffusionszeit t aufgetragen. Das Anfangsoffset wird dabei so gewählt, dass die Diffusions-Startlinie gerade den x^2 -Wert 0 erhält und der Ablesefehler für die Diffusionsstrecke x wird mit 0,02 mm abgeschätzt. Der Fehler für die Messung mit der Stoppuhr wird nach der üblichen Formel zu $\sigma_t = 0.01 + 0.005 \cdot t$ abgeschätzt. Es wurde ein linearer Fit mit einer Ursprungsgeraden durchgeführt, die jeweiligen

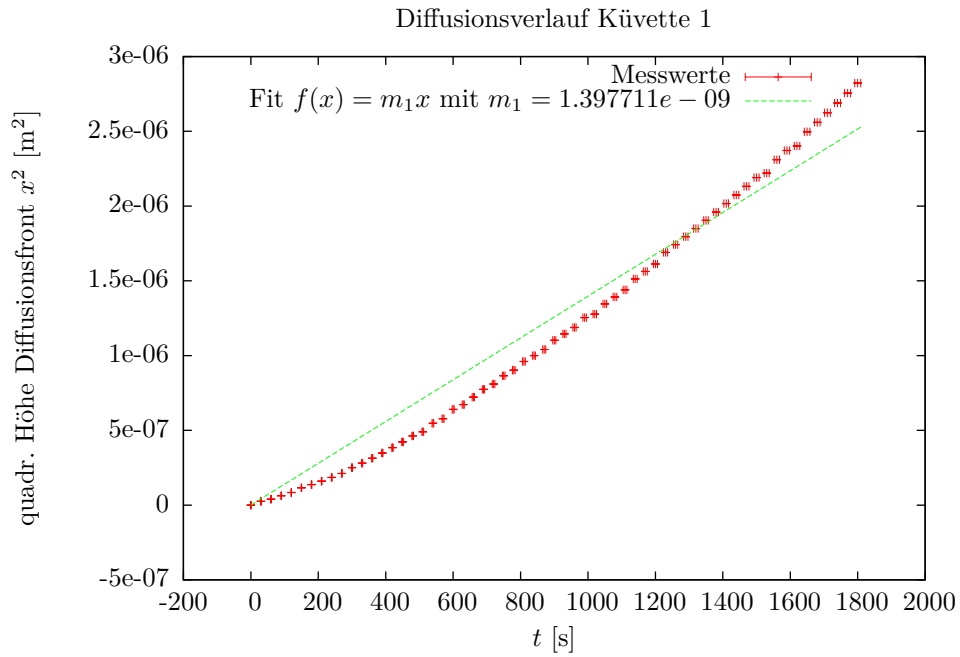


Abbildung 4: Gemessene Diffusionskurve Filter $c = \frac{c_0}{16}$

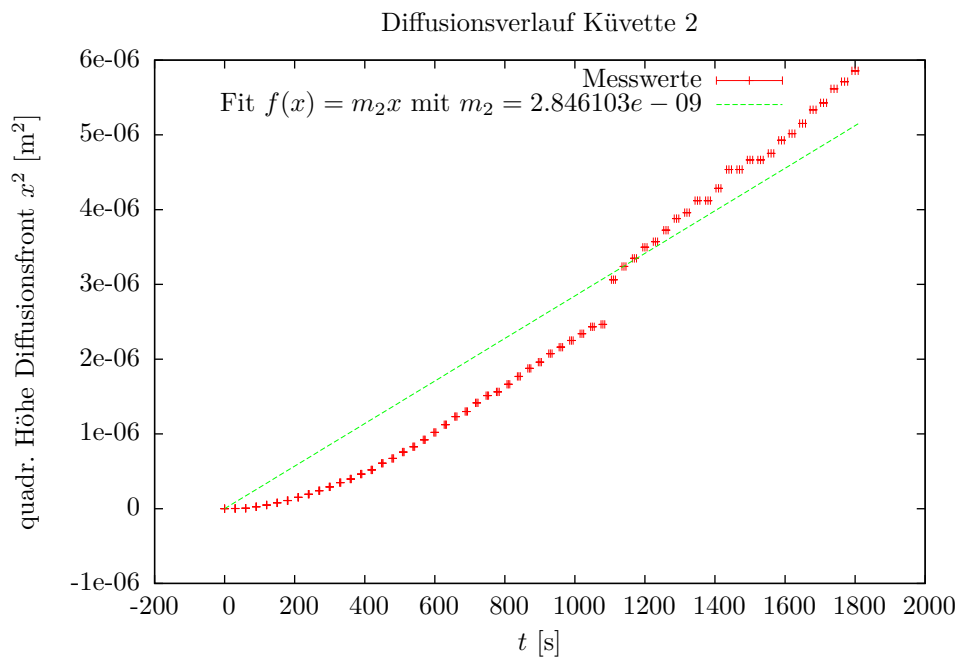


Abbildung 5: Gemessene Diffusionskurve Filter $c = \frac{c_0}{32}$

Fitergebnisse für die Steigungen m_1 und m_2 mit Gnuplot lauten:

$$m_1 = (1.40 \pm 0.02) \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_2 = (2.85 \pm 0.06) \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Warum es sich bei den Messwerten um eine Ursprungsgerade handeln muss, wird im Folgenden klar, wenn jetzt aus den Steigungen ein Wert für den Diffusionskoeffizienten D berechnet werden soll.

Mit $c = \frac{c_0}{16}$ und Gleichung 3 folgt, dass

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right) \Leftrightarrow \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) = \frac{7}{8}$$

Mit dem Computer ermittelt man den Argumentwert der erf-Funktion für $\frac{7}{8}$ zu 1.0848, also:

$$\frac{x}{\sqrt{4Dt}} = 1.0848 \Rightarrow x^2 = 4.7072D \cdot t$$

Das ist genau die gesuchte Ursprungsgerade. Der Diffusionskoeffizient D_1 der ersten Messung ist dann

$$D_1 = \frac{m_1}{4.7072} = 2.97 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

mit der zugehörigen Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_{D_1} = \frac{\sigma_{m_1}}{4.7072} = 0.04 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Insgesamt also $D_1 = (2.97 \pm 0.04) \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Völlig analog erhält man für die zweite Küvette mit dem Filter $c = \frac{c_0}{32}$:

$$\operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) = \frac{15}{16} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{4Dt}} = 1.3172 \Rightarrow x^2 = 6.94D \cdot t$$

Daraus folgt dann wieder

$$D_2 = \frac{m_2}{6.94} = 4.11 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

mit der zugehörigen Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_{D_2} = \frac{\sigma_{m_2}}{6.94} = 0.09 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

und zusammen $D_2 = (4.11 \pm 0.09) \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Daraus bildet man das gewichtete Mittel zu

$$D = (3.16 \pm 0.03) \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

4.3 Konzentrationsprofil

Im zweiten Teil der Messung wurde die Diffusionslänge in Abhängigkeit von der Konzentration gemessen. Da die Zeit dabei als annähernd konstant angenommen wird, sollten die Messwerte auf einer Kurve liegen, die einer der Kurven in Abb. 3 ähnlich sind.

Für die Messung der Diffusionslänge wird pauschal ein Fehler von 0,02 mm angenommen, denn es war recht dunkel und somit ist es möglich, beim Ablesen 1-2 Teilstriche danebengelegt zu haben. Da die Werte ohne Umrechnung aufgetragen werden, entfällt hier eine Fehlerfortpflanzung.

Nun muss noch eine Verschiebung der gemessenen Höhen vorgenommen werden, sodass man die Abstände zur ursprünglichen Grenzschicht der Flüssigkeit erhält. Es würde sich hier anbieten, den Abstand für den $c_0/2$ -Filter als Nullpunkt zu wählen. Jedoch war es nicht möglich, die Versuchsanordnung auf diesen Filter zu eichen, da

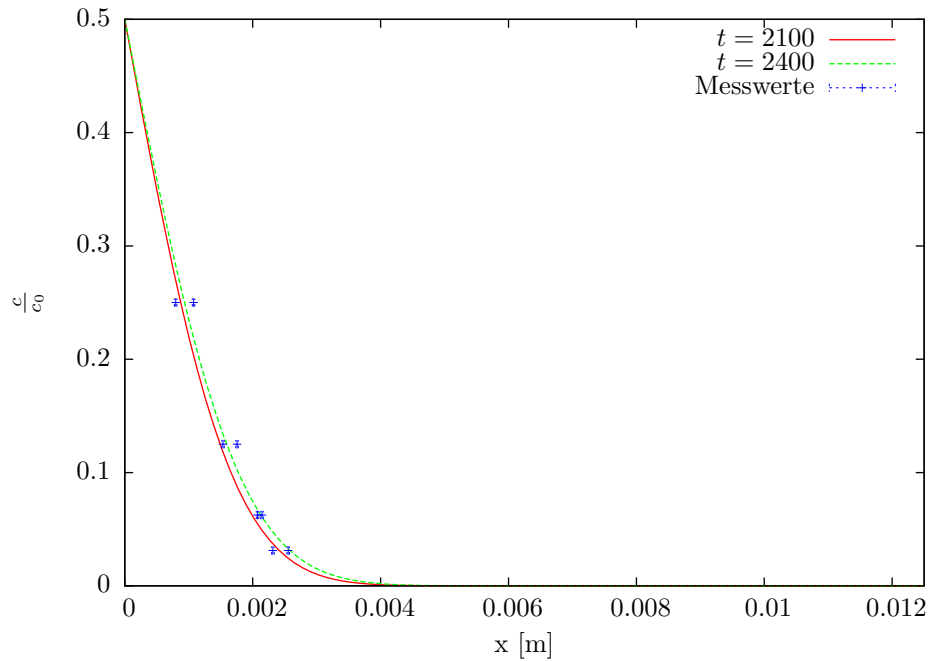


Abbildung 6: Konzentrationsprofil nach 40 Minuten

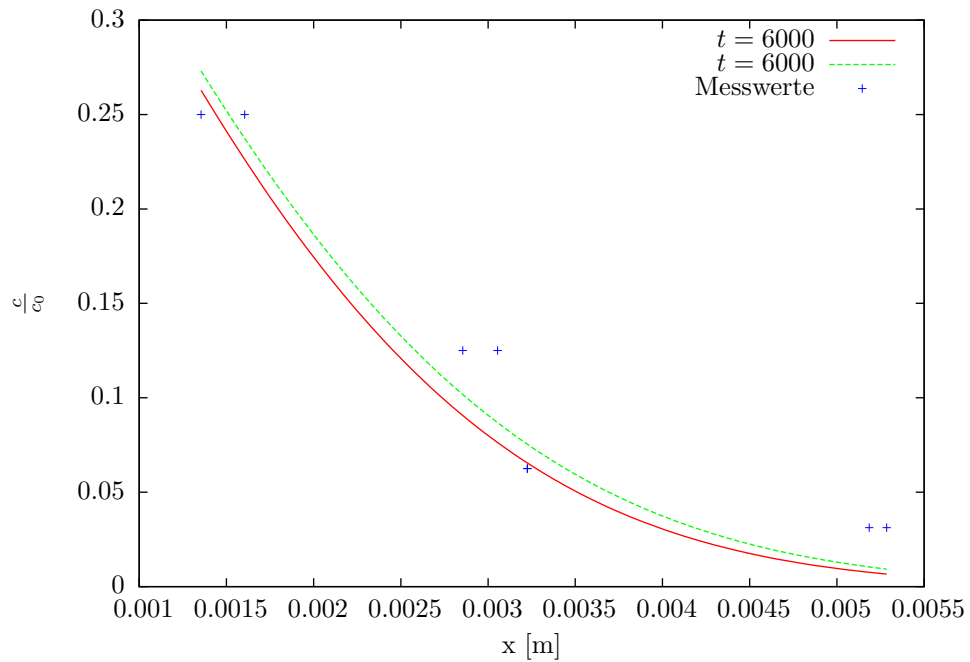


Abbildung 7: Konzentrationsprofil nach 100 Minuten

das Potentiometer nicht auf den benötigten Widerstand eingestellt werden konnte. Somit stehen nur die Werte für die anderen Filter zur Verfügung. Daher wird zur Anpassung der Messwerte die Diffusionslänge für den $c_0/4$ Filter an der berechneten Kurve abgelesen und alle Messwerte werden so verschoben, dass der Mittelwert für die beiden $c_0/4$ -Messungen gerade der neue Nullpunkt ist.

Die Messung erstreckte sich über etwa fünf Minuten. Daher sind in den beiden Diagrammen 6 und 7 jeweils zwei berechnete Kurven dargestellt, wobei eine den Verlauf zum Zeitpunkt $t - 5$ min und die andere den Verlauf zum Zeitpunkt $t + 5$ min darstellt. Die eingeschlossene Fläche zwischen diesen beiden Kurven sollte dann im Idealfall die Messwerte enthalten.

In den Diagrammen wird deutlich, dass sich die theoretischen Kurven selbst bei dieser großzügigen Zeitabschätzung nur sehr geringfügig unterscheiden. Somit ist der Fehler, der daraus resultiert, dass man eine konstante Zeit annimmt, vergleichsweise klein (nur etwa 0,1 mm).

5 Diskussion

5.1 Bestimmung des Diffusionskoeffizienten

In der Versuchsbeschreibung ist für den Diffusionskoeffizienten ein Vergleichswert von $D = 4.0 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ angegeben. Dieser Wert unterscheidet sich deutlich vom gemessenen und liegt auch nicht mehr in z.B. einer 3σ -Umgebung.

Die prozentuale Abweichung beträgt 21%. Dabei ist auffällig, dass das Ergebnis der zweiten Messung sehr nahe am angegebenen Wert liegt, der Wert des ersten Versuches dagegen stärker abweicht, obwohl es beim zweiten Versuch einen Sprung in den Messwerten gibt, der wahrscheinlich durch eine Erschütterung der Versuchsanordnung zustande gekommen ist.

Zentrale Fehlerquellen dieses Versuchsteils sind sicherlich die nicht immer zeitgenaue Ablesung der Diffusionsstrecke und die generelle Ungenauigkeit beim Ablesen der Küvettenhöhe.

Möglich ist auch, dass der Schluss von Diffusionsstrecke auf Konzentration praktisch nicht hundertprozentig zuverlässig ist, denn eventuell verläuft die Diffusionsfront teilweise leicht ungerade und auch Verschmutzungen der Küvetten verfälschen das Ergebnis.

5.2 Konzentrationsprofil

Bei den Diagrammen in der Auswertung zum Konzentrationsprofil ist recht gut zu erkennen, dass die Messwerte der berechneten Relation entsprechen. Dass es trotzdem recht starke Abweichungen von der erwarteten Kurve gibt, kann nicht darauf zurückgeführt werden, dass die Zeit für die Messung als konstant angenommen wurde, obwohl insgesamt eine Zeit von etwa fünf Minuten verstrichen ist, da sich das Konzentrationsprofil in dieser Zeit nur geringfügig ändern sollte (vgl. Diagramme 6 und 7).

Es gibt im Versuch also Fehlerquellen, die das Ergebnis wesentlich stärker beeinflussen. Allen voran ist hier zu nennen, dass der Diffusionsprozess durch das Reinstecken und Rausziehen der Küvette so wie den mit dem Austausch der Filter verbundenen Erschütterungen recht stark von außen beeinflusst wurde. Dabei werden von außen zusätzliche Turbulenzen in der Flüssigkeit erzeugt, die den Diffusionsprozess beschleunigen.

Literatur

Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 2*. Springer Spektrum, 2013.

Peter Kurzweil. *Physik Formelsammlung*. Vieweg+Teubner, 2009.