



---

**Versuch 1:**  
**Pohlscher Resonator**

---



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Herleitung der Differentialgleichung . . . . .	3
2.2	Lösung der Differentialgleichung . . . . .	3
2.3	Resonanzfrequenz . . . . .	4
2.4	Phasenverschiebung . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
3.1	Aufbau . . . . .	5
3.2	Messung . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1	Versuchsreihe ohne Anregung . . . . .	7
4.1.1	Bestimmung der Eigenfrequenz des Systems . . . . .	7
4.1.2	Bestimmung des logarithmischen Dekrements . . . . .	7
4.2	Versuchsreihe mit Anregung . . . . .	8
4.2.1	Bestimmung der Amplitude . . . . .	8
4.2.2	Bestimmung der Phasenverschiebung . . . . .	8
4.2.3	Bestimmung der Resonanzfrequenz . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>8</b>
5.1	Versuchsreihe ohne Anregung . . . . .	8
5.1.1	Abklingkurven . . . . .	8
5.1.2	Bestimmung der Eigenfrequenz des Systems . . . . .	10
5.1.3	Bestimmung des logarithmischen Dekrements . . . . .	10
5.2	Versuchsreihe mit Anregung . . . . .	11
5.2.1	Resonanzkurve . . . . .	11
5.2.2	Phasenverschiebung . . . . .	11
5.2.3	Bestimmung der Resonanzfrequenz . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>13</b>



PRAKTIKANTEN:  
Fabian Heimann,  
Lars Niklas Brinkschmidt

DURCHFÜHRUNG:  
18.04.2013

# 1 Einführung

Bei dem Versuch zum vorliegenden Protokoll soll das physikalische Phänomen der Resonanz untersucht werden. Bei einem angetriebenem harmonischen Oszillator wird die Amplitude in Abhängigkeit der Erregerfrequenz und Dämpfung gemessen.

Schwingende Systeme im allgemeinen und Resonanzen im Besonderen spielen in Physik und Alltag eine große Rolle. Auch in der Baustatik von beispielweise Brücken oder Hochhäusern spielt Schwingung und die Angst vor einer Resonanzkatastrophe ein Rolle. In der Theorie wird ein Zusammenhang zwischen Erregerfrequenz und Amplitude hergeleitet, der dann anschließend im Experiment überprüft werden soll.

## 2 Theorie

Die angeregte Schwingung lässt sich durch eine lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung lösen, die hier hergeleitet werden soll. Auf die Herleitung der Lösung wird ob ihres Umfangs verzichtet, sie ist jedoch im [1] ab S.155ff nachzulesen.

### 2.1 Herleitung der Differentialgleichung

Auf die Drehscheibe mit dem Trägheitsmoment  $\Theta$  wirkt, proportional zum Auslenkungswinkel  $\varphi$ , eine Rückstellkraft  $D^*\varphi$ . Proportional zur Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  wirkt außerdem ein bremsendes Moment  $\rho\dot{\varphi}$ . Für eine freie Schwingung ergibt sich die homogene Differentialgleichung

$$\Theta\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + D^*\varphi = 0$$

Mit einem periodischen Antriebsmoment  $M\cos(\omega t)$ , mit  $\omega$  als Anregungsfrequenz ergibt sich die inhomogene Differentialgleichung für erzwungene gedämpfte Schwingungen

$$\Theta\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + D^*\varphi = M\cos(\omega t)$$

Wenn man nun wie folgt definiert

$$\omega_0^2 := \frac{D}{\Theta}; \quad 2\beta := \frac{\rho}{\Theta}; \quad N := \frac{M}{\Theta}$$

wobei  $\omega_0$  die Eigenfrequenz und  $\beta$  die Dämpfung des Oszillators ist, kann man die Gleichung in Normalform darstellen:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = N\cos(\omega t)$$

### 2.2 Lösung der Differentialgleichung

Die Lösung für die homogene Differentialgleichung ist nur für die freie Schwingung notwendig. sie lautet

$$\varphi(t) = e^{-\beta t} \cdot (Ae^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t} + Be^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t})$$

Hier wird nur die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung angegeben, der Lösungsweg ist jedoch nachzuschlagen. Bewegungsgleichung für eine angetriebene, gedämpfte Schwingung:

$$\varphi(t) = \frac{N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cdot \cos(\omega t - \arctan(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}))$$

**Eigenfrequenz** Die Eigenfrequenz ist gegeben durch

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (1)$$

**Logarithmisches Dekrement** Die Dämpfung des Oszillators bestimmt das Verhältnis der aufeinanderfolgende Maxima  $\varphi(t)$  und  $\varphi(t+T)$ , wobei T gleich der Periodendauer ist. Aus  $\varphi(t)/\varphi(t+T) = \exp(+\beta T)$  folgt die Definition für das logarithmische Dekrement  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \ln\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T)}\right) = \beta T \quad (2)$$

## 2.3 Resonanzfrequenz

Die Funktion  $\varphi(t)$  wird maximal, wenn

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 \iff \omega^4 + 2\omega^2(2\beta^2 - \omega_0^2) + \omega_0^4$$

minimal wird. Für die Resonanzfrequenz  $\omega_r$  folgt daraus:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (3)$$

## 2.4 Phasenverschiebung

Da der Oszillator angeregt wird, kann er auch nur mit der Frequenz des Anregers schwingen. Es kann jedoch eine Phasenverschiebung  $\phi$  zwischen Anreger und Oszillator geben. Betrachtet man die Phasenverschiebung so sieht man, dass es  $\omega = 0$  auch  $\phi = 0$  folgt. Für  $\omega = \omega_0$  gilt dann  $\phi = \pi/2$ . Der Graph hat dort, vor allem im Bereich niedriger Dämpfung eine Sprungstelle. Bei einer Phasenverschiebung von  $\phi = \pi/2$  erhält der Oszillator zusätzliche Beschleunigung, weshalb die Resonanzfrequenzen in diesem Bereich zu vermuten sind. Bei verschiedenen Dämpfungen erwartet man folgende Graphen:

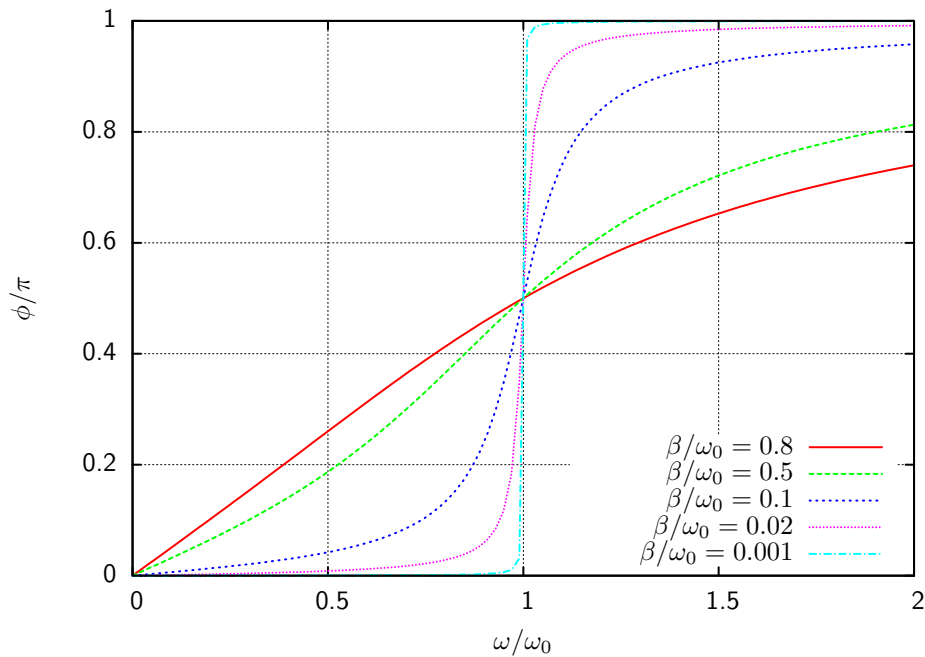


Abbildung 1: Phasenverschiebung

## 3 Durchführung

### 3.1 Aufbau

Der Versuch wird mittels eines Pohlschen Resonators mit integriertem Winkelkodierer, einer justierbaren Wirbelstrombremse und einem Exzenter, der zur Steuerung und Aufnahme der Messwerte an einen Computer angeschlossen ist. (siehe Abb. 1<sup>1</sup> Das Massestück wird für diesen Versuch nicht benötigt. Das Rad kann frei schwingen, wobei die Spiralfeder eine Rückstellkraft ausübt, und über eine Wirbelstrombremse, bei der die Bremskraft von der Länge des in der Bremse befindlichen Radteils abhängt, eine Bremsung proportional zur Winkelgeschwindigkeit eintritt. Um das schwingende Rad herum gibt es eine Winkelskala, auf deren Ursprung der Zeiger des ruhenden Rades zeigen sollte. Der Exzenter ist über einen Hebel mit dem Schwungrad verbunden, wodurch er das Rad mit einer, per Computer beliebig steuerbaren Frequenz, antreiben kann. Der eingebaute Winkelkodierer nimmt den Auslenkungswinkel auf, der dann in einer Datei mit Zeitangabe gespeichert wird.

### 3.2 Messung

Zunächst werden bei verschiedenen Dämpfungsgeraden durch die Wirbelstrombremse (Einstellungen von 0, 4, 6, 8mm) die Daten für eine freie Schwingung des Rades aufgenommen,

<sup>1</sup> von <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3548>

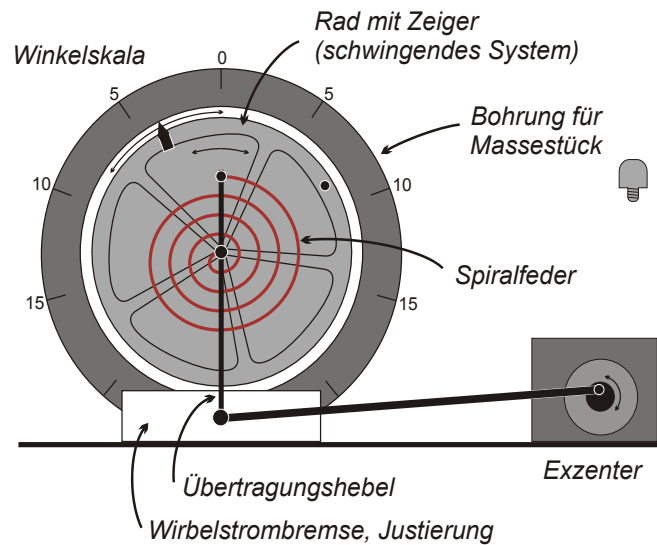


Abbildung 2: Schematischer Versuchsaufbau. Der Exzenter regt das Rad an, das zu schwingen beginnt. Die Spiralfeder sorgt für ein rückstellendes Moment, die justierbare Wirbelstrombremse für Dämpfung. Die Auslenkung des Rades kann an der Winkelskala abgelesen werden.

bei der zunächst das Rad auf  $120^\circ$  ausgelenkt und dann losgelassen wird. Wenn das geschehen ist, werden jeweils für die Einstellungen 4, 6 und 8mm der Wirbelstrombremse erzwungene Schwingungen mit Frequenz von 100mHz bis 600mHz in 100mHz Schritten durchgeführt. Ist die Einschwingphase beendet, schwingen also Rad und Exzenter mit gleicher Frequenz (erkennbar daran, dass die Phasenraumdarstellung einen annähernden Kreis bildet), können verwertbare Daten über die Amplitude der erzwungenen Schwingung gewonnen werden. Sind diese 24 Messungen abgeschlossen sollen im Bereich der Resonanzfrequenz weitere Messungen durchgeführt werden. Wichtig ist, den Versuch bei zu großem Auslenkungswinkel ( $\varphi \geq 120^\circ$ ) sofort zu beenden.

## 4 Auswertung

Aus den aufgezeichneten Messreihen haben wir durch verschiedene Ansätze weitere Daten gewonnen. Die Ergebnisse wurden durch ein Python-Skript erzeugt, das hier kurz vorgestellt werden soll. Für die diversen fortgeschrittenen numerischen Analysen benutzt das Programm die Bibliothek `numpy`<sup>2</sup>.

### 4.1 Versuchsreihe ohne Anregung

#### 4.1.1 Bestimmung der Eigenfrequenz des Systems

Aus den Versuchen ohne äußere Anregung des Rades durch den Motor kann u.a. die Eigenfrequenz  $\omega_0$  bestimmt werden. Wir werten dazu die Versuche zu den unterschiedlichen Dämpfungen separat aus.

Durch das Programm aufgezeichnet wurde der zeitliche Verlauf der Auslenkung des Rades. Die Frequenz dieser Schwingung ist die gesuchte Eigenfrequenz. Um sie zu bestimmen, führt das Programm als erstes eine Fouriertransformation durch. Dieses gibt dann ein Frequenzspektrum an diskreten Frequenzen aus. (siehe Abb. 4) Um die weitere Auswertung nicht von der Lage der Frequenz-Stützstellen abhängig zu machen, bildet das Programm eine spline-Interpolation 4. Ordnung der diskreten Werte. Als Nächstes wird das Maximum dieser Funktion bestimmt; dieses ist das gesuchte  $\omega_0$ .

Zur Bestimmung der Genauigkeit der Frequenz wird die Breite des Maximums bestimmt: Das Programm sucht dazu die Stellen links und rechts vom Maximum, an denen der Funktionswert bei 75 % des Maximums liegt. Die sich ergebende Breite verwenden wir als Genauigkeit der Frequenz  $\omega_0$ . Die erhaltenen Werte sind in Tab. 1 dargestellt.

#### 4.1.2 Bestimmung des logarithmischen Dekrements

Das logarithmische Dekrement kann anhand von Formel (2) berechnet werden. Dazu wird zuerst aus der oben bestimmten Frequenz die Periodendauer  $T$  nach der Formel  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  berechnet. Dann bildet das Programm aus den an diskreten Zeitpunkten vorliegenden Messdaten wiederum mit einer spline-Interpolation 4. Ordnung eine kontinuierliche Funktion. Dies ermöglicht es, den Wert für die Auslenkung an beliebigen Zeitpunkten anzunähern. Als nächstes tastet das Programm diese Funktion im Intervall  $[t_{\min}, t_{\max} - T]$  ( $t_{\min} = \min_i t_i$ ,  $t_{\max} = \max_i t_i$ ) ab und sucht Stellen, an denen die Funktion betragsmäßig größer als 95 % der maximalen Auslenkung ist. Dort wird dann nach Formel (2) das logarithmische Dekrement bestimmt. Abschließend wird der arithmetische Mittelwert über die einzelnen Werte gebildet und die Standardabweichung bestimmt. Dies ergibt für jede Dämpfung ein logarithmisches Dekrement, woraus  $\beta$  nach (2) berechnet wird. Die erhaltenen Werte sind in Tab. 2 dargestellt.

---

<sup>2</sup><http://www.numpy.org/>, abgerufen am 3.5.2013

## 4.2 Versuchsreihe mit Anregung

Auch bei der Versuchsreihe mit Anregung werten wir die Messreihen für konkrete Dämpfungen und Anregungsfrequenzen separat aus.

### 4.2.1 Bestimmung der Amplitude

Um das Resonanzverhalten des Versuches zu untersuchen, brauchen wir die maximalen Auslenkungen der jeweiligen Versuche. Dazu bestimmt das Programm zu jeder Messreihe den höchsten und den niedrigsten Wert. Die Amplitude ergibt sich als halbe Differenz dieser Werte. Als Genauigkeit dieses Wertes verwenden wir die Genauigkeit der Winkelmessung, nämlich  $0.25^\circ$ .

### 4.2.2 Bestimmung der Phasenverschiebung

Wir wollen außerdem die Phasenverschiebung zwischen Anregung und Schwingung des Rades bestimmen. Dazu gibt der Motor bei jedem Nulldurchgang einen Impuls aus. Das Programm sucht als erstes alle Nulldurchgänge und ermittelt die mittlere Differenz  $T$ . Dann werden die Nulldurchgänge  $t_0$  einzeln durchlaufen und das Programm sucht eine Nullstelle der Interpolationsfunktion der Auslenkung des Rades zwischen  $t_0$  und  $t_0 + \frac{T}{2}$ . Dies entspricht einem Intervall von  $0$  bis  $\pi$  für die Phasenverschiebung. Wird ein Minimum gefunden, speichert das Programm die Differenz in der Zeit ab und rechnet sie in eine Phasenverschiebung um. Am Ende werden wieder Mittelwert und Standardabweichung für die Werte der verschiedenen Motor-Nulldurchgänge bestimmt.

### 4.2.3 Bestimmung der Resonanzfrequenz

Als letzter Auswertungspunkt soll die Resonanzfrequenz für jede Dämpfung aus der Messung abgelesen und mit dem theoretischen Wert verglichen werden. Dieser ergibt sich nach Gl. (3). Den experimentellen Wert bestimmen wir als Maximum der ausgewerteten Resonanzkurve, denn die Abtastung nahe des Maximums ist relativ gut. Als Ungenauigkeit für  $\omega$  nehmen wir den Abstand zum nächsten gemessenen Wert für  $\omega$  an. Für den theoretischen Wert ergibt sich folgende Fehlerabschätzung

$$\sigma_{\omega_r}^2 = \sigma_{\omega_0}^2 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - 2\beta^2} + \sigma_{\beta}^2 \frac{4\beta^2}{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (4)$$

## 5 Ergebnisse

### 5.1 Versuchsreihe ohne Anregung

#### 5.1.1 Abklingkurven

In Abb. 3 sind die Abklingkurven für die verschiedenen Dämpfungen dargestellt.



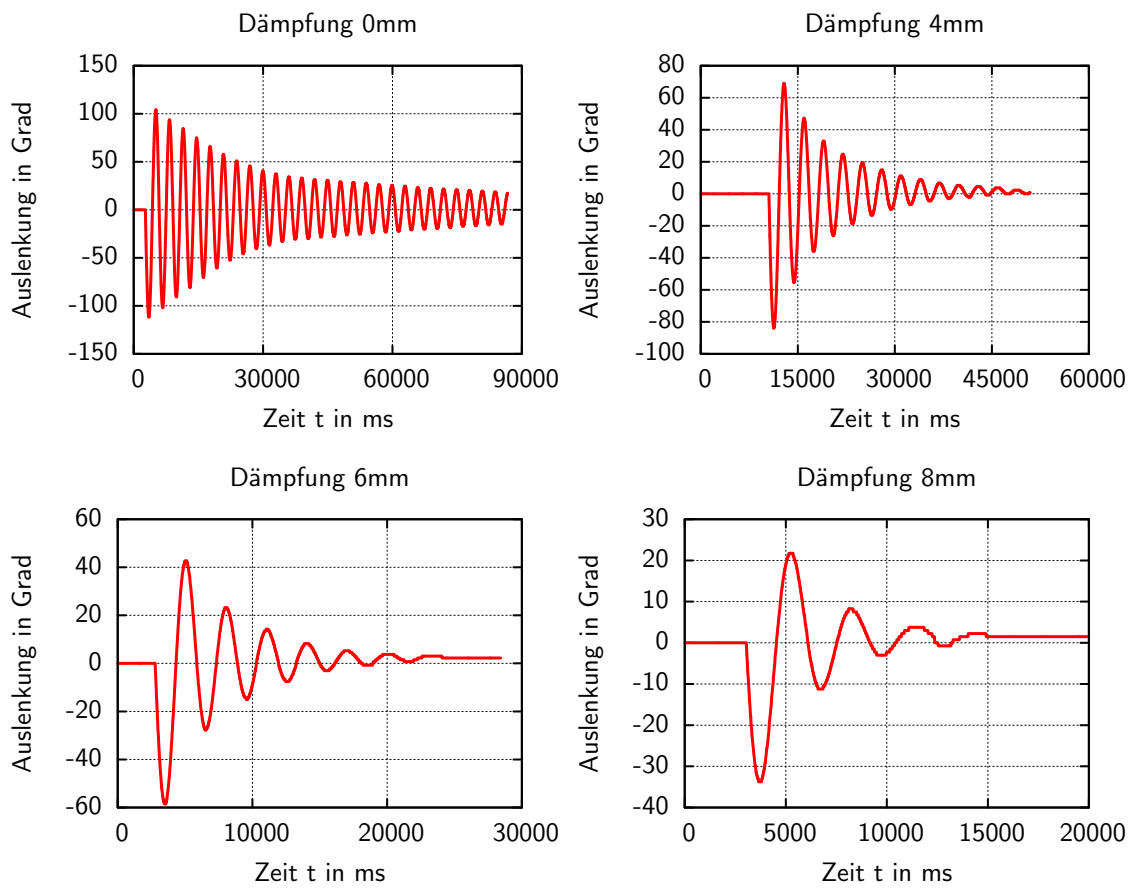


Abbildung 3: Abklingkurven für verschiedene Dämpfungen

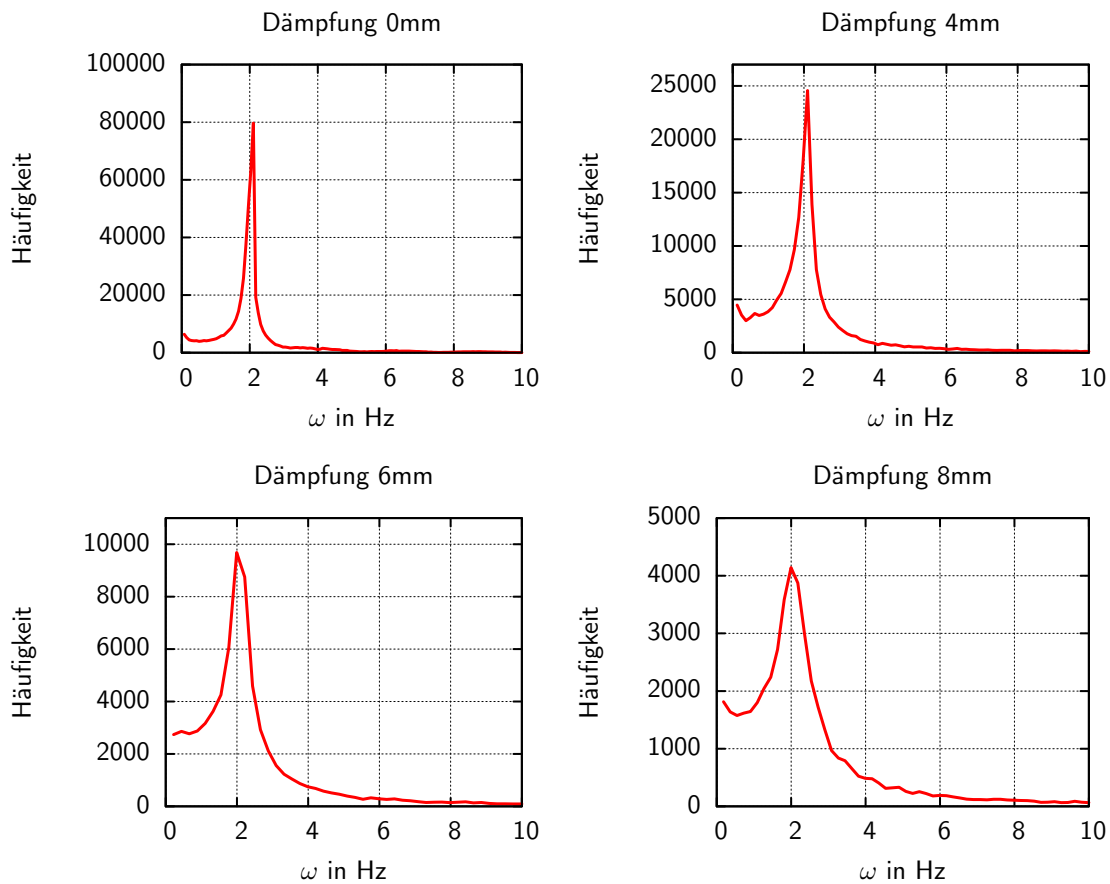


Abbildung 4: Frequenzspektren für verschiedene Dämpfungen

### 5.1.2 Bestimmung der Eigenfrequenz des Systems

Bei der Bestimmung der Eigenfrequenz ergeben sich deutliche Maxima in den Frequenzspektren (siehe Abb. 4). Daraus erhalten wir die in Tab. 1 dargestellten Eigenfrequenzen. Die Eigenfrequenz  $\omega_0$  bei 0mm Dämpfung ist  $2.089 \pm 0.06$  Hz.

### 5.1.3 Bestimmung des logarithmischen Dekrements

Für die logarithmischen Dekremente und die Dämpfungskonstanten  $\beta$  ergeben sich die Werte in Tab. 2. Die Standardabweichung von  $\beta$  erhalten wir nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_\beta = \frac{\sigma_\Lambda}{T} \quad (5)$$

Dabei ist  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Mit diesen Werten können wir nach der Formel (1) ebenfalls  $\omega_0$  berechnen und erhalten die Werte in Tab. 3. Die Ergebnisse stimmen recht gut mit der

Dämpfung	Eigenfrequenz $\omega_e$ [Hz]
0 mm	$2.09 \pm 0.06$
4 mm	$2.1 \pm 0.1$
6 mm	$2.1 \pm 0.3$
8 mm	$2.0 \pm 0.4$

Tabelle 1: Eigenfrequenzen  $\omega_e$  für die verschiedenen Dämpfungen

Dämpfung	$\Lambda$	$\beta$ [1/s]
0 mm	$0.2 \pm 0.2$	$0.054 \pm 0.04$
4 mm	$0.4 \pm 0.1$	$0.143 \pm 0.04$
6 mm	$0.71 \pm 0.05$	$0.236 \pm 0.02$
8 mm	$1.1 \pm 0.2$	$0.35 \pm 0.04$

Tabelle 2: Logarithmische Dekremente und Dämpfungskonstanten

Eigenfrequenz für 0 mm Dämpfung oben überein. Es gilt

$$\sigma_{\omega_0}^2 = \frac{(\beta \cdot \sigma_\beta)^2}{\beta^2 + \omega_e^2} + \frac{(\omega_e \cdot \sigma_{\omega_e})^2}{\beta^2 + \omega_e^2} \quad (6)$$

## 5.2 Versuchsreihe mit Anregung

### 5.2.1 Resonanzkurve

Die gemessene Resonanzkurve ist in Abb. 5 dargestellt.

### 5.2.2 Phasenverschiebung

Die Ergebnisse für die Phasenverschiebung sind in Abb. 6 dargestellt.

### 5.2.3 Bestimmung der Resonanzfrequenz

Die Ergebnisse für die Resonanzfrequenz sind in Tab. dargestellt.

Dämpfung	$\omega_0$ [Hz]
0 mm	$2.09 \pm 0.06$
4 mm	$2.1 \pm 0.1$
6 mm	$2.1 \pm 0.3$
8 mm	$2.1 \pm 0.4$

Tabelle 3: Eigenfrequenzen  $\omega_0$

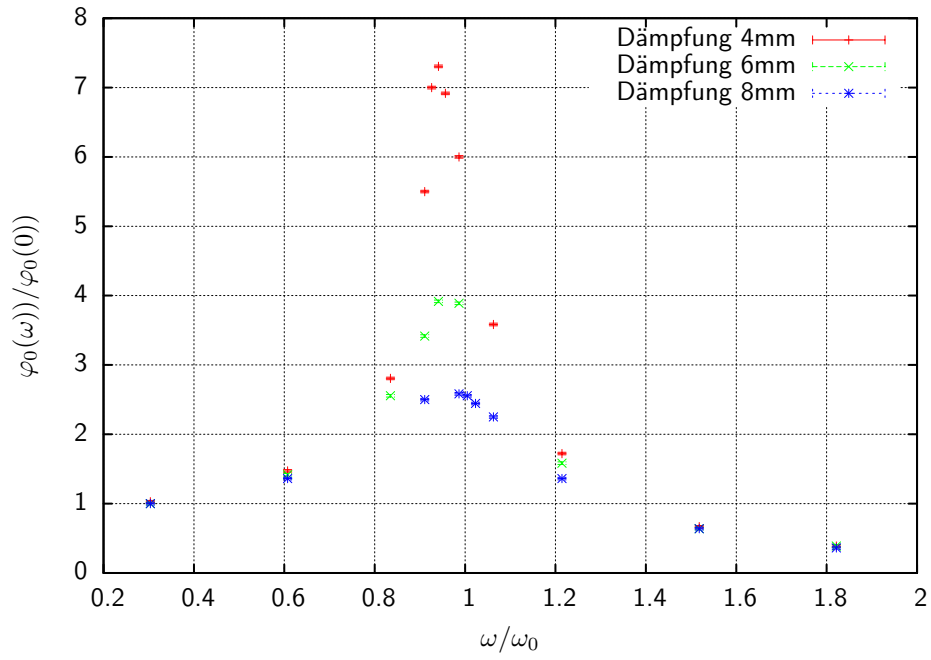


Abbildung 5: Resonanzkurve

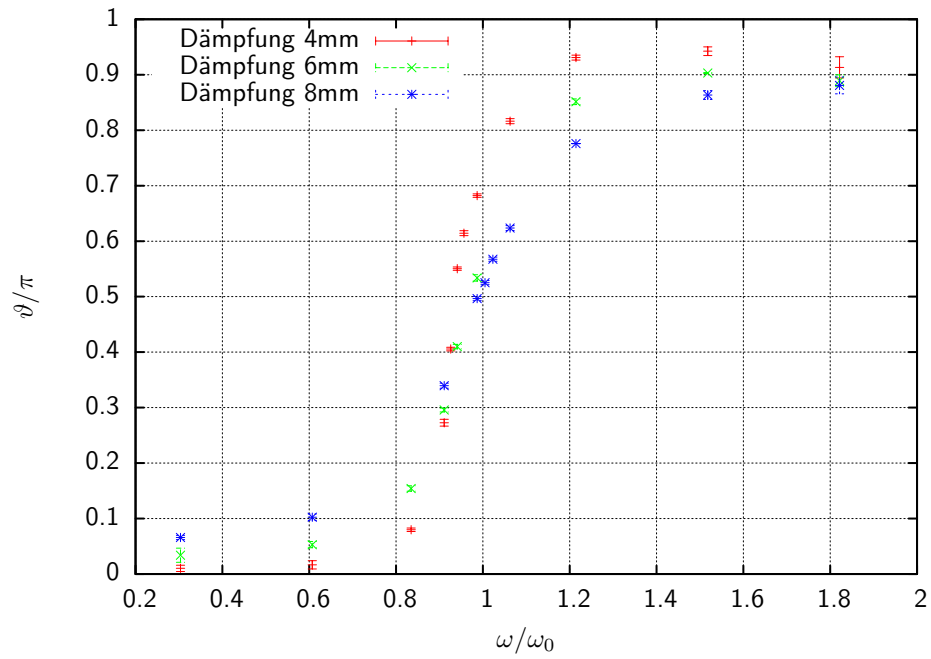


Abbildung 6: Phasenverschiebung

Dämpfung	$\omega_r$ gemessen [Hz]	$\omega_r$ theoretisch [Hz]
4 mm	$1.97 \pm 0.04$	$2.1 \pm 0.2$
6 mm	$1.97 \pm 0.04$	$2.1 \pm 0.3$
8 mm	$2.06 \pm 0.04$	$2 \pm 0.4$

Tabelle 4: Resonanzfrequenzen gemessen und theoretisch

## 6 Diskussion

Ableseungenauigkeiten sind bei diesem Versuch größtenteils zu vernachlässigen. Von Hand abgelesen und eingestellt wurden nur die Erstausslenkung bei der freien Schwingung und die Dämpfung. Dies sind jedoch keine relevanten Fehlerquellen, ungenaue Einstellungen der Wirbelstrombremse schaden lediglich der Vergleichbarkeit und Reproduzierbarkeit. Allerdings ist die Ableseungenauigkeit der Winkelmessung nicht zufriedenstellend. Es findet eine Zeitmessung auf mit Intervallen von ca. 16ms statt, während die Winkelmessung Werte nur auf  $0.25^\circ$  genau angibt. Daher ist es sinnvoll, die Winkelwerte mit einem Fehler von  $0.25^\circ$  anzunehmen, da nicht beurteilt werden kann, inwieweit die angegebenen Messwerte vom Messsystem gerundet wurden, oder welche Auflösung das Messgerät besitzt. Da es einen Offset des Zeigers von ca.  $3^\circ$  gab, können, obwohl es eine gründliche Bereinigung dieses Fehlers gab, dadurch entstandene Beeinträchtigungen nicht gänzlich ausgeschlossen werden.

Im Rahmen der oben diskutierten Messungenauigkeiten stimmen die Ergebnisse gut mit den theoretischen Vorhersagen überein: Das gemessene Resonanzverhalten und die Phasenverschiebung zeigen die theoretisch zu erwartende Form. Der Vergleich zwischen experimenteller und theoretischer Bestimmung der Resonanzfrequenz ist im Rahmen der Messfehler akzeptabel.

## Literatur

- [1] DIETER MESCHEDE (2010): *Gerthsen Physik*, 24. Auflage, Springer Heidelberg Dordrecht London New York