



Versuch 13:
Magnetfeld von Spulen



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Maxwell-Gleichungen	3
2.2	Biot-Savart-Gesetz	3
3	Durchführung	4
3.1	Messung der Magnetfelder	4
3.2	Aufbau	5
3.3	Durchführung	6
4	Auswertung	6
4.1	Eigenschaften der Spulen	6
4.2	Eichung des Stromintegrators	6
4.3	Ergebnisse für die lange Spule	7
4.4	Messungen mit der Hall-Sonde	8
4.5	Vergleich der Magnetfelder	10
4.6	Bestimmung der Induktionskonstante	11
5	Diskussion	12
5.1	Qualität der Ergebnisse	12
5.2	Fehlerquellen	12



PRAKTIKANTEN:
Christian Gaß,
Fabian Heimann

DURCHFÜHRUNG:
11.09.2013

1 Einleitung

In diesem Versuch soll das Magnetfeld verschiedener Spulen vermessen werden. Dafür wird einmal eine zweite Spule verwendet, in der ein Strom induziert wird. Außerdem wird eine Hallsonde verwendet, die das Magnetfeld durch den sog. Hall-Effekt bestimmt.

2 Theorie

2.1 Maxwell-Gleichungen

Die wesentlichen Gleichungen für diesen Versuch lassen sich aus zwei der vier Maxwell-Gleichungen herleiten. Wir bezeichnen die magnetische Flussdichte mit \vec{B} , die magnetische Erregung mit \vec{H} , die Stromdichte mit \vec{j} und mit \vec{D} die dielektrische Verschiebungsdichte.

$$\begin{aligned}\nabla \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

Falls keine magnetisierbaren Materialien eine Rolle spielen, sind Flussdichte und magnetische Erregung proportional zueinander:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}. \quad (1)$$

Die Proportionalitätskonstante μ_0 ist dabei eine Naturkonstante.

2.2 Biot-Savart-Gesetz

Das Biot-Savart-Gesetz dient der Berechnung der magnetischen Flussdichte für einen beliebigen Stromfluss. Es lässt sich aus den obigen Maxwell-Gleichungen herleiten. Wir betrachten den Fluss eines konstanten Stromes I durch einen beliebigen Leiter. Dann gilt

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = -\frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \int \frac{\hat{e}_{12} \times d\vec{s}}{r_{12}^2}. \quad (2)$$

Zylinderspule Nun wollen wir das Magnetfeld einer Zylinderspule berechnen. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten. Zum einen kann das Magnetfeld durch das sog. Amperesche Gesetz bestimmt werden, das ebenfalls eine Maxwell-Gleichung ist. Dabei nimmt man jedoch an, dass das Magnetfeld innerhalb der Spule homogen und außerhalb zu vernachlässigen ist. Dann ergibt sich

$$B = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{n}{L}, \quad [1, \text{S. } 89] \quad (3)$$

wobei I den Strom durch die Spule, N die Anzahl der Windungen und L die Länge der Spule bezeichnet.

Eine genauere Berechnung ist mit dem oben erwähnten Biot-Savart-Gesetz möglich. Es ergibt sich

$$B(z) = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I}{2} \left[\frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} \right], \quad (4)$$

wobei z den Abstand vom Mittelpunkt der Symmetrieachse der Spule und R deren Radius bezeichnet.

Helmholtz-Spulenpaar Nun soll das Magnetfeld eines sog. Helmholtz-Spulenpaars berechnet werden. Dabei handelt es sich um zwei gleiche Spulen den Radius R , die im Abstand $d = R$ zueinander aufgestellt sind. Durch beide fließt ein in die selbe Richtung orientierte Strom. Auch hier berechnen wir das Magnetfeld mit dem Biot-Savart-Gesetz; hier als Überlagerung des Magnetfeldes der beiden einzelnen Spulen. Der entstehende Term lässt sich gut durch seine Taylor-Entwicklung annähern, denn durch die Helmholtz-Bedingung $d = R$ verschwindet der Term mit z^2 . Es gilt [1, S. 94]

$$B(z) \approx \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I}{(5/4)^{3/2} \cdot R} \left[1 - \frac{144}{125} \cdot \frac{z^4}{R^4} \right] \quad (5)$$

Für $z \ll R$ können wir den letzten Term ebenfalls weglassen und erhalten

$$B(z) = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I}{(5/4)^{3/2} \cdot R}. \quad (6)$$

3 Durchführung

3.1 Messung der Magnetfelder

Zur Messung der Magnetfelder verwenden wir zwei unterschiedliche Verfahren, die im Folgenden kurz vorgestellt werden.

Induktionsspule Mit einer Induktionsspule können streng genommen keine Magnetfelder, sondern nur die Änderung solcher gemessen werden. Das Prinzip ist Folgendes: Durch die Änderung des magnetischen Flusses Φ_m wird in einer Spule nach dem sog. Faradayschen Induktionsgesetz eine Spannung U induziert. Es gilt

$$U_{\text{ind}} = -n \cdot \frac{d\Phi_m}{dt} = -n \cdot \frac{d}{dt}(A \cdot B) \quad (7)$$

Wir betrachten nun Fälle, in denen die Fläche A konstant bleibt und sich das Magnetfeld B senkrecht zur Spulenfläche ändert. Im Speziellen betrachten wir den Fall, dass das Magnetfeld komplett ausgeschaltet und der Fluss somit auf 0 fällt. Dann gilt

$$B = -\frac{1}{n \cdot A} \int U_{\text{ind}} dt. \quad (8)$$

Das Integral über die Induktionsspannung wird mit einem sog. Stromintegrator bestimmt. Durch den Widerstand dieses Bauteils können wir dann das Integral über den Strom in das gesuchte Integral über die Spannung umrechnen.

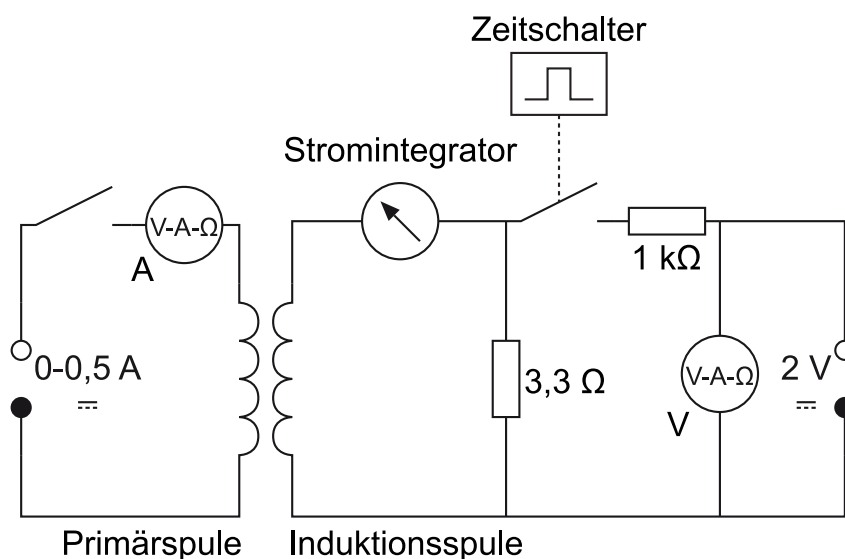


Abbildung 1: Schaltplan des Aufbaus zur Eichung des Stromintegrators und Messung des Magnetfeldes mit der Induktionsspule. [2]

Hallsonde Eine Hallsonde ermöglicht eine Messung eines Magnetfeldes, ohne dass sich dieses ändern muss. Es besteht aus einer leitenden Platte, die von einem konstanten Strom durchflossen wird. Gemessen wird jeweils das Feld senkrecht zu dieser Platte. Durch ein solches Feld werden die Elektronen durch die Lorentzkraft abgelenkt. Dadurch trennen sich die Ladungen nach kurzer Zeit innerhalb der Platte. Es stellt sich ein Gleichgewicht zwischen der elektrischen Kraft durch diese Ladungstrennung und der Lorentzkraft ein. Nun messen wir die Potentialdifferenz zwischen den beiden Enden der Platte, die senkrecht zum Stromfluss stehen. Diese Potentialdifferenz ist direkt proportional zum Magnetfeld B .

3.2 Aufbau

Mit den beiden vorgestellten Verfahren soll nun also das Magnetfeld verschiedener Spulen vermessen werden. Konkret betrachten wir ein Helmholtz-Spulenpaar, eine dicke und eine lange Spule. Diese werden jeweils auf einer Schiene befestigt. Dazu wird jeweils ein Messgerät, also entweder die Induktionsspule oder die Hallsonde angebracht, sodass sie jeweils in der Symmetrieachse der zu vermessenden Spule sitzen. Auf der Schiene ist ein Längenmaß eingraviert, sodass wir leicht die Position der Induktionsspule/ Hallsonde relativ zur zu untersuchenden Spule ablesen können.

Für die Messung mit der Induktionsspule schließen wir diese an den in Abb. 1 dargestellten Stromkreis an. Durch diesen können wir vor Beginn der eigentlichen Messung den Stromintegrator eichen und während der Messung das Integral über den Strom in der Induktionsspule messen. Die Hallsonde zeigt direkt den Wert für das Magnetfeld an; hier wird also keine weitere Schaltung zur Auswertung benötigt.

	Windungen n	Radius R [cm]	Länge l [cm]
Induktionsspule	369	2.95	6
Lange Spule	829	6.485	44.9
Dicke Spule	502	10	27
Helmholtzspulen	507	6.3	-

Tabelle 1: Übersicht über die Daten der Spulen

3.3 Durchführung

In einem ersten Schritt soll der Stromintegrator geeicht werden. Dazu bauen wir die in Abb. 1 dargestellte Schaltung auf. Eine Spannung von 2 V wird hier über verschiedene Widerstände durch einen Zeitschalter für eine vorgegebene Zeit an den Stromintegrator angelegt. Später können wir aus dem Aufbau der Schaltung und den verschiedenen Widerständen den Strom berechnen, der durch den Stromintegrator geflossen ist. Die Messung führen wir für wenigstens 10 unterschiedliche Zeitdauern durch.

Nun können wir das Magnetfeld der langen Spule mit der Induktionsspule vermessen. Dazu bauen wir den Versuch wie oben beschrieben auf. An die Primärspule wird ein Strom von 0.5 A angelegt. Für viele verschiedene Abstände zwischen Primär- und Sekundärspule messen wir dann die Größe des Stromstoßes jeweils einmal für das Einschalten und einmal für das Ausschalten der Spannungsversorgung der Primärspule. Sind wir in der Mitte der Spule angekommen, wenden wir den Versuchsaufbau einmal, sodass wir auch das Magnetfeld auf der anderen Seite der Spule messen können.

Nun führen wir die Messung mit der Hallsonde durch. Dazu fahren wir die Hallsonde so wie die Induktionsspule jeweils durch die zu untersuchende Spule. An der Stromversorgung dieser ändern wir hier nichts. Da diese Messungen wesentlich schneller gehen, verwenden wir ein feineres Raster von etwas 1 cm im interessanten Bereich.

Zuletzt notieren wir den Offset der Hallsonde und die relevanten Spulendaten.

4 Auswertung

4.1 Eigenschaften der Spulen

Die wesentlichen Eigenschaften der verwendeten Spulen sind in Tab. 1 zusammengestellt.

4.2 Eichung des Stromintegrators

Zur Eichung des Stromintegrators wird der in Abb. 1 dargestellte Stromkreis verwendet. Wir bezeichnen dazu den 3.3 Ω -Widerstand mit R_1 , den 1 k Ω -Widerstand mit R_2 und den Innenwiderstand des Stromintegrators mit R_i . Dieser Widerstand ist auf dem Gerät mit 10 k Ω angegeben. Nach den Kirchhoffschen Gesetzen gilt für den Strom, der durch den

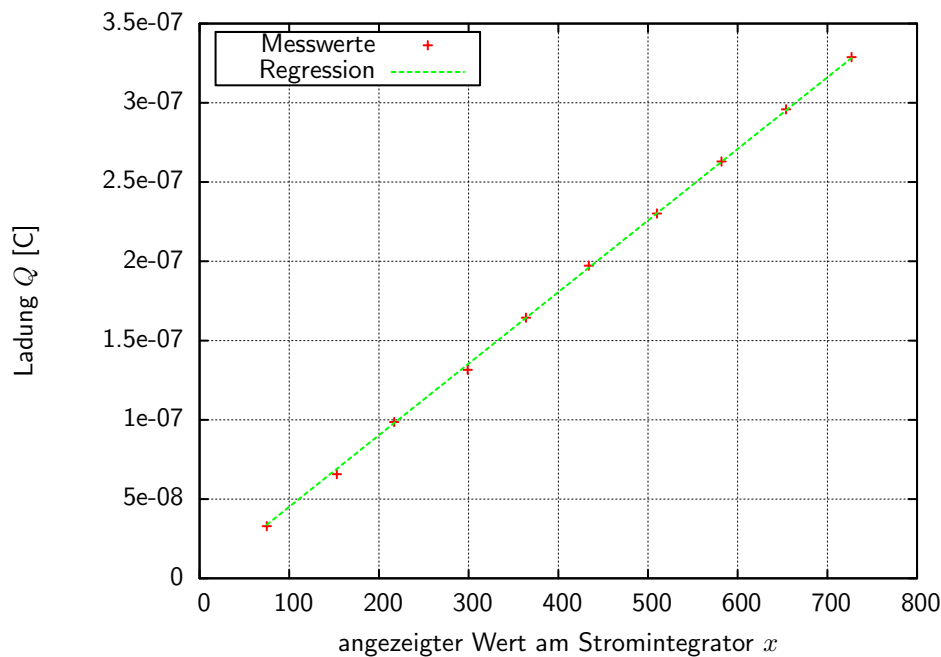


Abbildung 2: Plot zur Eichung des Stromintegrators.

Integrator fließt

$$I = \frac{2 \text{ V}}{R_i + R_2 \cdot \left(\frac{R_i}{R_1} + 1\right)} = 6.58 \cdot 10^{-7} \text{ A.} \quad (9)$$

Als Eichkonstante verwenden wir das Verhältnis von Ladung pro Skalenteil. Mithilfe der eben berechneten Stromstärke können wir für die einzelnen Messungen diese Ladung Q berechnen gegen gemessenen Werte auftragen. So erhalten wir den in Abb. 2 dargestellten Graphen. Durch eine einfache proportionale Regression ergibt sich

$$\kappa = \frac{Q}{x} = 4.52 \cdot 10^{-10} \text{ C.} \quad (10)$$

4.3 Ergebnisse für die lange Spule

Als erstes soll nun das Feld der langen Spule untersucht werden. Für die Bestimmung mit der Induktionsspule setzen wir an Gleichung (8) an. Das Vorzeichen wechselt je nachdem, ob wir das Magnetfeld ein oder aus schalten. Wir betrachten im Folgenden oBdA positive Werte. Im Sekundärstromkreis gilt $U_{\text{ind}} = R_i \cdot I$. Daraus ergibt sich

$$B = \frac{1}{nA} \cdot \int U_{\text{ind}} dt = \frac{R_i}{nA} \cdot \int I_{\text{ind}} dt = \frac{R_i \cdot Q}{nA} = \frac{R_i \cdot \kappa}{nA} \cdot x. \quad (11)$$

Die Ergebnisse für B aus Ein- und Ausschalten mitteln wir jeweils. So erhalten wir den in Abb. 3 dargestellten Graphen.

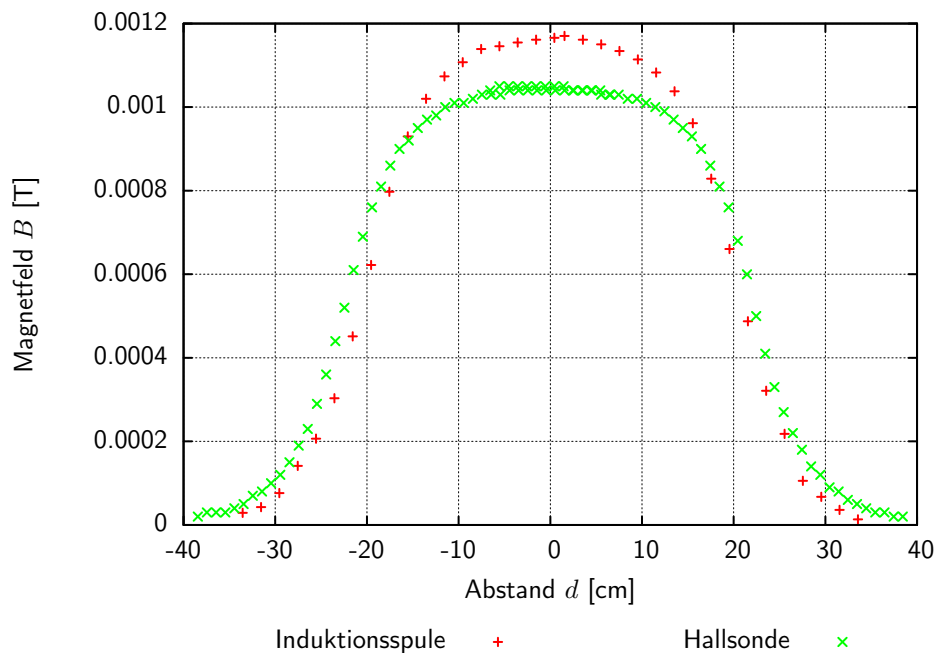


Abbildung 3: Messung des Magnetfeldes der langen Spule mit Induktionsspule und Hallsonde

Es sind vor allem im Bereich des Maximums gewisse Unterschiede zwischen den beiden Messungen zu erkennen. Das Abklingverhalten ist ebenfalls leicht unterschiedlich. Im Groben entsprechen die Graphen aber einander. Grund für diese Unterschiede könnte eventl. eine unterschiedliche Position der beiden Sensoren in der Spule sein (leicht abseits der Symmetrieachse). Als zuverlässiger betrachtet werden sollten tendenziell die Ergebnisse der Hall-Sonde, da hier kleinere Fehler aufgrund der Kalibrierung zu erwarten sind.

4.4 Messungen mit der Hall-Sonde

Lange Spule Nun soll die Messungen für die lange und die dicke Spule mit der Hall-Sonde mit den theoretischen Daten verglichen werden. Als Fehler im Abstand d nehmen wir 0.5 cm an, da der Abstand zwischen der Spule und der Hallsonde in der Luft mit einem Lineal gemessen wurde. Als Fehler für die Hallsonde nehmen wir pauschal 5% des mittleren Messwertes an, da kein anderer Fehler angegeben war. Für die Theoriekurve verwenden wir Gleichung (4) und setzen die Werte aus 1 ein. So erhalten wir den in Abb. 4 dargestellten Graphen.

Es ist zu erkennen, dass die Theoriekurve ein ähnliches Verhalten zeigt wie die Kurve bei der Messung durch die Induktionsspule.

Dicke Spule Als nächstes verfahren wir für die dicke Spule analog wie für die lange Spule. So erhalten wir den in Abb. 5 dargestellten Graphen.

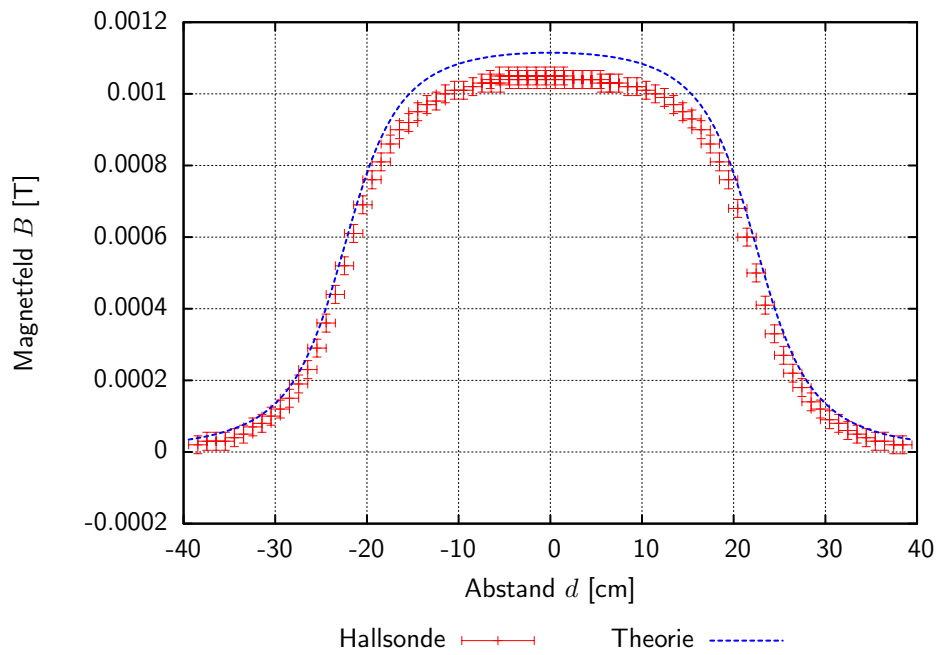


Abbildung 4: Vergleich der Messung der langen Spule mit der Hallsonde zur Theorie.

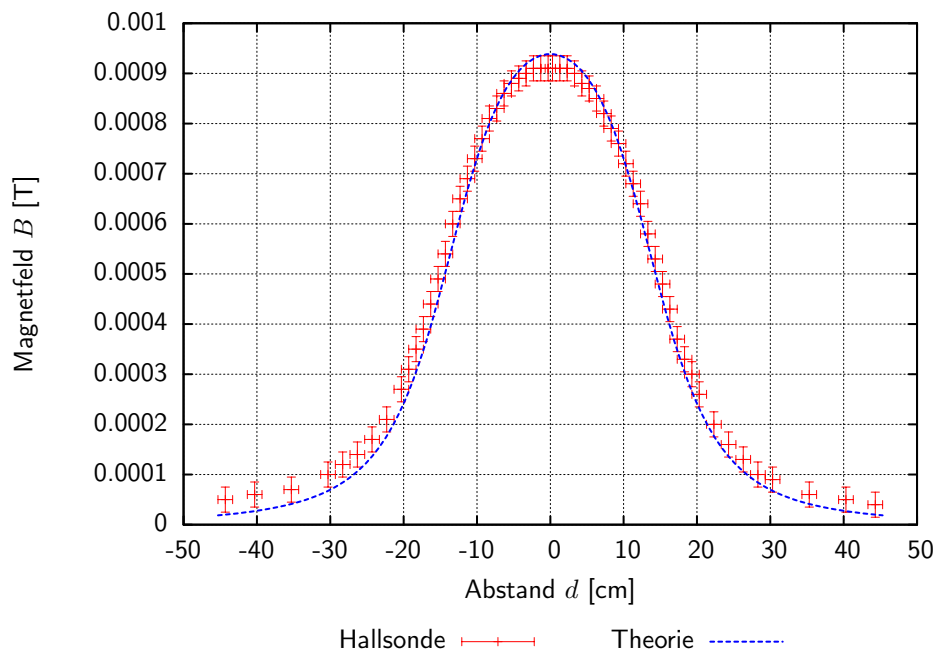


Abbildung 5: Vergleich der Messung der dicken Spule mit der Hallsonde zur Theorie.

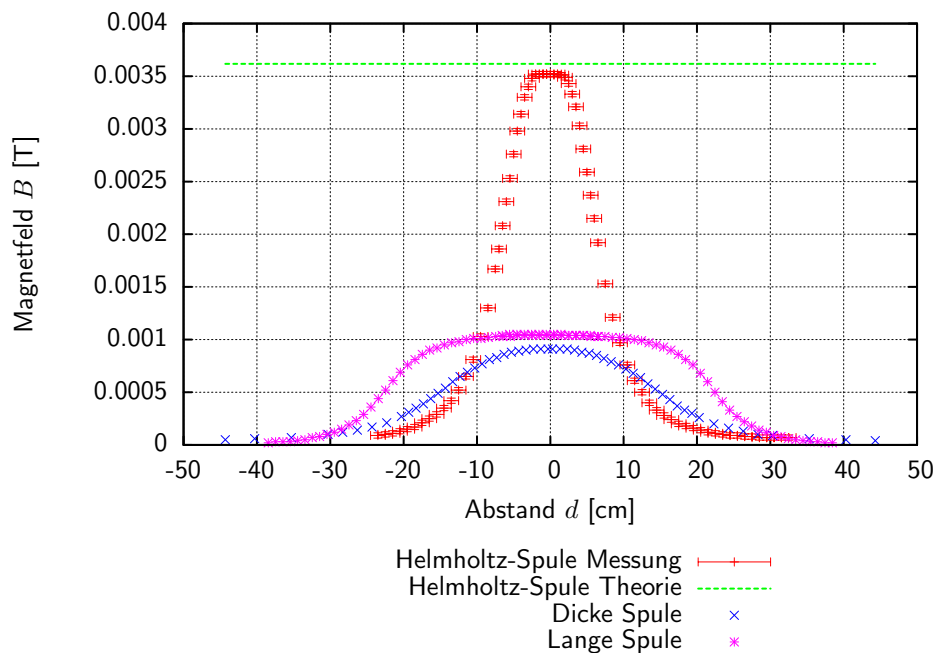


Abbildung 6: Vergleich der Messung der Helmholtzspulen mit den anderen Messungen und der Theorie. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde auf Fehlerbalken bei den Vergleichskurven verzichtet.

Hier stimmt die Messung recht gut mit der Theorie überein.

4.5 Vergleich der Magnetfelder

Als nächstes sollen Homogenität und Stärke der zwei oben ausgewerteten Magnetfelder mit denen der Helmholtzspulen verglichen werden. Außerdem wollen wir die Stärke des Magnetfeldes im Zentrum der Helmholtzspulen mit dem theoretischen Wert aus Gleichung (6) vergleichen. Damit erhalten wir

$$B(z) = \frac{\mu_0 \cdot I}{(5/4)^{3/2} \cdot R} = 3.618 \text{ mT}. \quad (12)$$

Der entsprechende Plot ist in Abb. 6 dargestellt. Die gemessene Flussdichte im Zentrum der Helmholtzspulen stimmt gut mit dem theoretisch vorhergesagten überein. Im Vergleich zu den anderen Spulen ist das Magnetfeld der Helmholtzspulen relativ stark. Die Homogenität ist im Rahmen der Messgenauigkeit bei allen betrachteten Spulen im Zentrum gut gegeben. Bei den Helmholtzspulen ist der homogene Bereich recht gering, da diese insgesamt kürzer waren als z.B. die lange Spule.

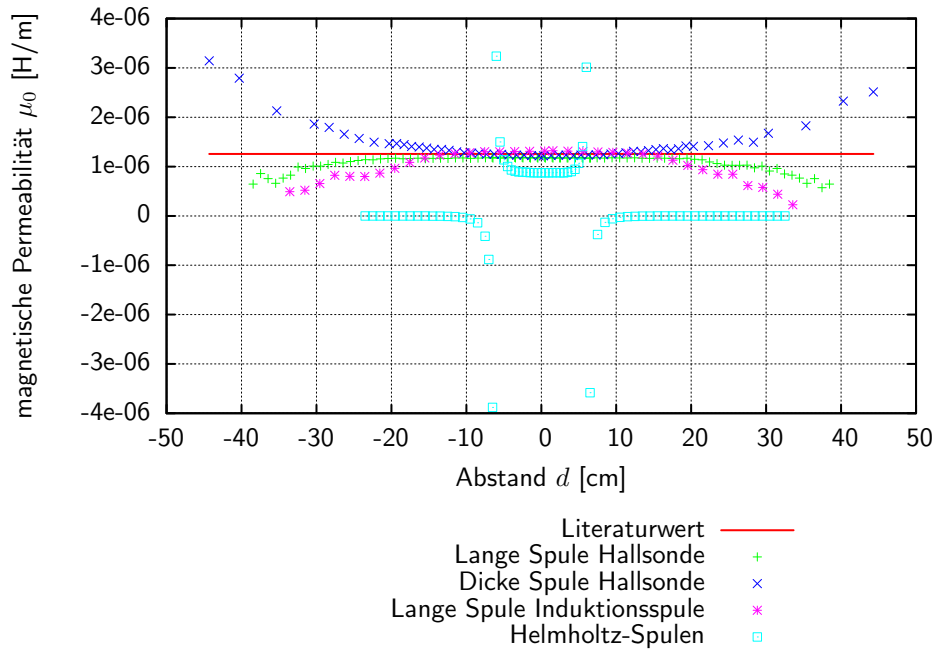


Abbildung 7: Verschiedene Ergebnisse zur Berechnung von μ_0 .

4.6 Bestimmung der Induktionskonstante

Als letzter Auswertungspunkt soll die Induktionskonstante μ_0 aus den verschiedenen Messungen bestimmt werden. Dazu nehmen wir an, dass die Messwerte exakt dem theoretisch berechneten Wert entsprechen. Dann formen wir die entsprechende Gleichung (4) für die lange und die dicke Spule und Gleichung (6) für die Helmholtzspulen nach μ_0 um und erhalten

$$\mu_0 = \frac{2B}{n \cdot I} \left[\frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} \right]^{-1} \quad (13)$$

sowie

$$\mu_0 = \frac{(5/4)^{3/2} \cdot B \cdot R}{n \cdot I} \left[1 - \frac{144}{125} \cdot \frac{z^4}{R^4} \right]^{-1}. \quad (14)$$

Es ist dabei zu berücksichtigen, dass es sich bei den Formeln um Näherungen um das Zentrum handelt. Es ist daher zu erwarten, dass die Werte ungenau werden, wenn man weit nach außen geht. Interessant sind daher vor allem die Werte nahe des Zentrums. Ein Vergleich der Ergebnisse der verschiedenen Messungen ist in Abb. 7 und 8 dargestellt.

Die Werte stimmen im Allgemeinen recht gut mit dem Literaturwert überein. Besonders groß ist der Fehler in der Messung mit der Helmholtzspule; hier ist der Wert für μ_0 z.T. sogar negativ. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Taylor-Näherung nach außen hin recht schnell zu hohen Fehlern führt. Im Vergleich zur Länge der anderen Spulen sind wir bei der Helmholtzspule auch sehr weit nach außen gegangen. Die Werte der anderen Messungen passen im Rahmen der Fehler der Messung recht gut.

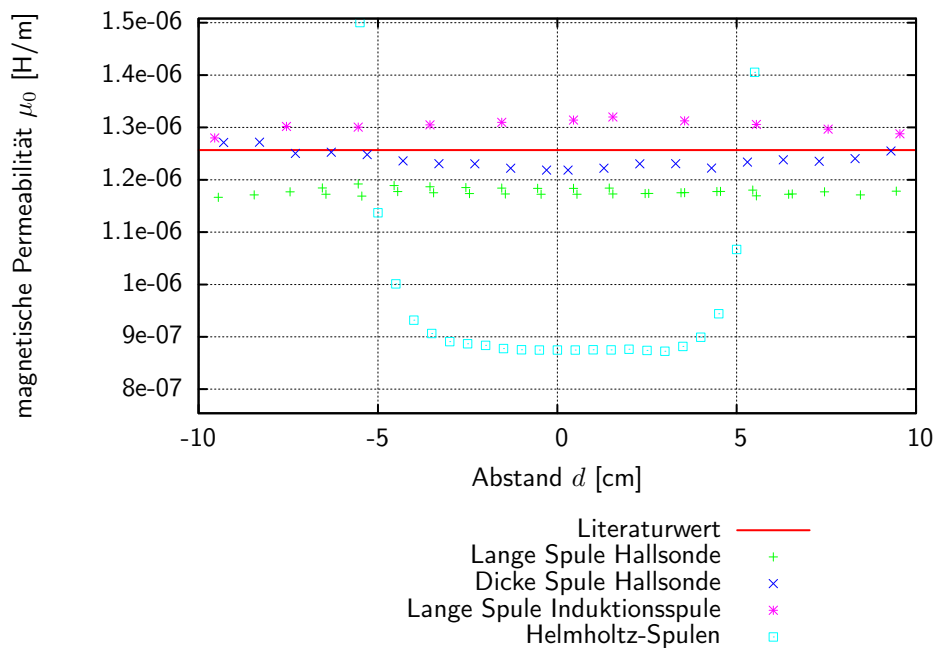


Abbildung 8: Verschiedene Ergebnisse zur Berechnung von μ_0 (Detailansicht)

5 Diskussion

5.1 Qualität der Ergebnisse

Die Ergebnisse stimmen im Wesentlichen recht gut mit den Vorhersagen überein. Es gibt vor allem bei der Messung des Magnetfeldes der langen Spule mit der Hallsonde recht deutliche Abweichungen. Auch die Messung der dicken Spule mit der Hallsonde ist nicht exakt; die Werte liegen aber überwiegend im Fehlerbereich. Zu berücksichtigen ist ebenfalls, dass die Theoriekurven jeweils auf Basis der Abmessungen der Spulen berechnet wurden; die zum Teil nicht exakt gegeben waren. Bei der Messung des Magnetfeldes der Helmholtzspulen gibt es ebenfalls Abweichungen zum theoretischen Ergebnis. Die abschließende Berechnung von μ_0 zeigt aber, dass die Messungen mit Ausnahme der Messung der Helmholtzspulen recht gut mit der Theorie überein stimmen.

5.2 Fehlerquellen

Die oben beschriebenen Fehler könnten durch verschiedene Fehlerquellen entstanden sein:

- In der Berechnung der theoretischen Kurven wurde mit Taylor-Entwicklungen gearbeitet. Diese sind fehlerbehaftet; wir haben die Werte aber als exakt angenommen.
- Die für die Berechnung der Theoriekurven maßgeblichen Spulendaten waren z.T. auch fehlerbehaftet gemessen; sie wurden jedoch ebenfalls als exakt angenommen.

- Die Fehlerabschätzungen sowohl für die Messung mit der Induktionsspule (Anzeige am Stromintegrator) wie auch die Messung mit der Hallsonde (Anzeige am Messgerät) ermöglichten keine exakte Berechnung der Fehler. Wir haben die Fehler daher grob abgeschätzt; sie könnten aber in Einzelfällen größer sein.
- Für die Theoriekurven wurde angenommen, dass sich die Induktionsspule/ Sonde zentral in der Spule befindet. Dies war nur eine Schätzung nach Augenmaß.

Literatur

- [1] WOLFGANG DEMTRÖDER (2009): *Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik*, 5. Auflage, Springer Berlin Heidelberg
- [2] *Lernportal der Universität Göttingen: Magnetfeld von Spulen*, <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/4087>, abgerufen 16.7.2013