Versuch 2: Gravitationswaage

Inhaltsverzeichnis

Praktikanten:
Fabian Heimann,
Lars Niklas Brinkschmidt

Durchführung:
25.04.2013

1 Einführung

Die Gravitationskonstante γ ist eine wichtige Naturkonstante, die zum ersten Mal eine physikalische Überprüfung der Keppler'schen Planetengesetze und die Bestimmung nicht nur von relativen, sondern auch von absoluten Massen für Planeten, ermöglichte. Sie ist aber gleichzeitig die heutzutage am ungenauesten bestimmte physikalische Naturkonstante überhaupt, ihr relativer Fehler liegt ums tausendfache höher als der des plank'schen Wirkungsquantums. Seit der Entdeckung der Bewegungsgesetze durch Newton ist ihre immer genauere Bestimmung eine Herausforderung für die Physik. Ein häufig verwendetes Experiment ist die Gravitationswaage, dessen Funktionsweise in diesem Versuch rekapituliert werden soll.

2 Theorie

Zwischen zwei Massen M_1 und M_2 mit dem Abstand r wirkt eine Gravitationskraft $\vec{F} = \vec{F}(M_1, M_2, r)$. Newton erkannte durch Beobachtung mehrere proportionale Zusammenhänge.

$$\vec{F} \propto M_1, \vec{F} \propto M_2, \vec{F} \propto \frac{1}{r^2}$$

Daraus resultiert nun das bekannte Newtonsche Gravitationsgesetz:

$$\vec{F} = \gamma \cdot \frac{M_1 M_2}{r^2} \cdot \vec{e_r} \tag{1}$$

Die Gravitationskonstante γ gibt hierbei die Gravitationskraft zwischen zwei Massen von 1 kg in einem Abstand von 1 m an.

2.1 Aufbau

Die Theorie für diesen Versuch ist ohne eine Kenntnis des Versuchaufbaus nicht nachzuvollziehen, weshalb er hier vorgezogen wird. Schematisch ist der Versuchsaufbau in Abb. 1 dargestellt. Zwei große und zwei kleine Massen sind durch Achsen miteinander verbunden, die jeweils in ihrem Mittelpunkt drehbar gelagert sind. Die beiden kleinen Massen sind an einem Torsionsfaden aufgehängt, an dem auch ein Spiegel parallel zur Achse angebracht ist. Auf diesen Spiegel ist ein Laser gerichtet, dessen Strahl dann auf eine Skala reflektiert wird, was eine Messung der Auslenkung der kleinen Massen ermöglicht. Um Fehlerquellen zu vermeiden wird der Versuchsaufbau fest an der Wand verankert, um den Einfluss von Schwingungen zu reduzieren und die kleinen Massen werden mit einem Kupfergitter vor elektromagnetischen Kräften abgeschirmt und in einem evakuierten Glaszylinder aufgehängt um Reibung zu reduzieren.

2.2 Bestimmung der Gravitationskonstante

Werden die großen Massen aus ihrer Ruhelage ausgelenkt, so wirkt zwischen den großen und den kleinen Massen die Gravitationskraft. Dadurch werden die kleinen Massen aus

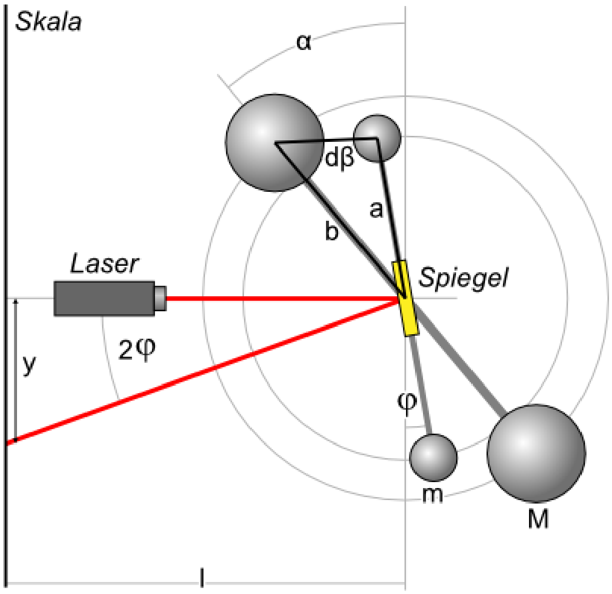

Abbildung 1: Schema des Versuchsaufbaus
1

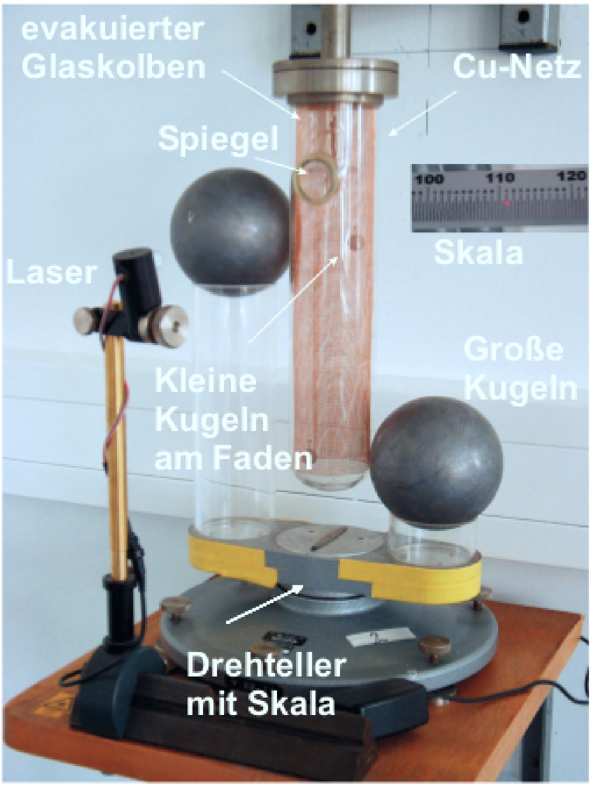

Abbildung 2: Versuchsaufbau
2

ihrer Ruhelage ausgelenkt, und zwar so weit, bis sich das Gravitationsmoment M_{grav} und das Torsionsmoment $D\varphi$ kompensieren. Danach wirkt die rücktreibende Kraft des Torsionsfadens, die die Massen wieder zurück in ihre Ruhelage zurückbewegt und dabei den Massen wieder Bewegungsenergie mitgibt, so dass sie über die Ruhelage hinwegbewegen. Nun wirkt die Kraft des Torsionsfadens wieder entgegengesetzt der Bewegungsrichtung der Massen; es entsteht eine Schwingung um eine neue Ruhelage. Das Torsionsmoment des Fadens mit dem Radius r_F und der Länge L_F lässt sich dabei mit dem Torsionsmodul G wie folgt berechnen:

$$D\varphi = G \cdot \frac{\pi r_F^4}{2L_F} \cdot \varphi \tag{2}$$

Die neue Ruhelage liegt in dem Punkt, in dem Torsionsmoment und Gravitationskraft gleich groß sind. Für diesen gilt

$$D\varphi = M_{grav} = 2a\gamma \frac{Mm}{d^2} \sin\beta \tag{3}$$

wobei M die Masse des großen Körpers mit dem Radius R , m die des Kleinen mit dem Radius r ist, a der Abstand von der Drehachse, d der zwischen großer und kleiner Masse. Der Winkel zwischen der Verbindungsachse der kleinen und der großen Massen ist β. Über die Periodendauer T lässt sich die Größe D bestimmen, da:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{\Theta}{D}}$$

Woraus folgt:

$$D = \frac{4\pi^2}{T^2}\Theta$$

Eingesetzt in Gleichung 3 ergibt sich dann:

$$\frac{4\pi^2}{T^2}\Theta\varphi = M_{grav} = 2a\gamma \frac{Mm}{d^2} \sin\beta$$

Mit dem Sinussatz ergibt sich:

$$\sin\beta = b\frac{\sin\delta}{d}$$

und damit

$$\frac{4\pi^2}{T^2}\Theta\varphi = M_{grav} = 2a\gamma \frac{Mm}{d^2} b \cdot \frac{\sin\delta}{d} \tag{4}$$

Für kleine Auslenkungswinkel $\delta = (\alpha - \varphi)$ gilt $\delta \approx \alpha$. Mit dem Kosinussatz folgt:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\delta$$

Setzt man nun δ wie oben in Gleichung 4 und formt nach γ um, ergibt sich für die Gravitationskonstante folgende Formel:

$$\gamma = 4\pi^2\varphi \frac{(\frac{2}{5}r^2 + a^2)(a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}{T^2 Mab\ \sin\alpha}. \tag{5}$$

3 Durchführung

Zu Beginn des Experiments befindet sich der im Abschnitt Theorie beschriebene Versuchsaufbau in der Ruhelage.

(1) Die großen Kugeln werden anchließend um 45° ausgelenkt.

(2) Nun wird über 5 Perioden hinweg alle 15s die Auslenkung notiert, dazu wird die senkrechte Position des Lasers auf der von der Decke herabhängenden Skala gemessen.

(3) Nach diesen 5 Perioden werden die großen Kugel um 90° zurückgedreht, also in 45° Auslenkung zur Anfangsposition.

(4) Wieder wird über 5 Perioden alle 15s die Auslenkung notiert.

Nach Abschluss des Versuchs werden die Kugeln wieder in die Postion bei 0° zurückgedreht.

Senkrechte Zeigerlänge l	2.71 m
Masse der großen Kugeln M	9.993 kg
Masse der kleinen Kugeln m	$2 \cdot 10^{-5}$ kg
Radius der kleinen Kugeln r	$7.5 \cdot 10^{-4}$ m
Abstand Schwerpunkt Drehachse - kleine Kugeln a	$2.4 \cdot 10^{-2}$ m
Abstand Schwerpunkt Drehachse - große Kugeln b	0.102 m

Tabelle 1: Daten des verwendeten Versuchsaufbaus

4 Auswertung

Die verwendete Gravitationswaage hat die in Tab. 1 dargestellten Daten.

Aus den aufgezeichneten Daten werden unterschiedliche Werte gewonnen: Die mittlere Auslenkung des Lichtzeigers und die Periodendauer T, daraus die mittlere Auslenkung der Drehwaage und daraus die Gravitationskonstante. Danach soll mithilfe des Literaturwertes für die Gravitationskonstante das Torsionsmodul des Torsionsfadens berechnet werden.

4.1 Auslenkung des Lichtzeigers und Periodendauer

Die Bestimmung der mittleren Auslenkung des Lichtzeigers und die Bestimmung der Periodendauer hängen unmittelbar zusammen. Denn die Lage der mittleren Auslenkung bestimmt die Lage der Nullstellen, aus denen sich T ergibt. Um dies zu berücksichtigen, verwenden wir folgendes Verfahren zur Bestimmung beider Werte.

Bestimmung der Periodendauer abhängig von der Ruhelage Als erstes wird in einem Python-Programm eine Funktion zur Bestimmung der Periodendauer in Abhängigkeit von der Ruhelage implementiert. Gegeben seien also ein Mittelwert $\bar{y}$, ein Vektor der Messwerte y und ein Vektor der Zeitpunkte der Messung t. Der Eingangswert für $\bar{y}$ ist dabei einfach das arithmetische Mittel. Die Funktion bildet zuerst eine Interpolationsfunktion durch die Messdaten mit Spline-Interpolation 3. Ordnung mithilfe der `numpy`-Bibliothek. Dann wird an den diskreten Stellen t_i $(i = 0, \ldots, |t| - 1)$ folgender Term betrachtet

$$(y_i - \bar{y}) \cdot (y_{i+1} - \bar{y}).$$

Ist dieser kleiner 0, liegt zwischen t_i und t_{i+1} ein Nulldurchgang. In diesem Fall bestimmt das Programm die Nullstelle exakt mithilfe der Interpolationsfunktion. Aus den nebeneinander liegenden Nullstellen wird jeweils ein Wert für T bestimmt. Die Funktion gibt dann den arithmetischen Mittelwert und die empirische Standardabweichung für T zurück.

Um die Periodendauer und die mittlere Auslenkung zu bestimmen, sucht das Programm das Minimum in der Standardabweichung von T. Diese Funktion zeigt ein sehr gutartiges Verhalten (siehe Abb. 3) und ermöglicht somit eine genaue Bestimmung der Ruhelage. Als Nebenergebnis erhalten wir dann T und seine Standardabweichung. Als Standardabweichung für $\bar{y}$ nehmen wir die Ablesegenauigkeit von 0.5 cm an.

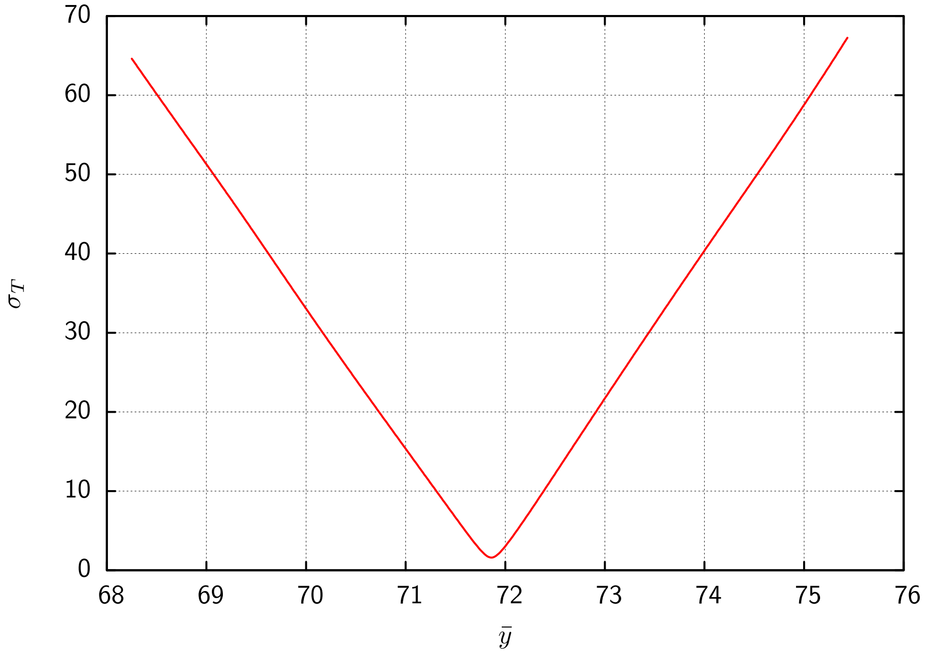

Abbildung 3: Exemplarisches Verhalten von $\sigma_T(\bar{y})$ (Daten: 1. Messung): Innerhalb der Standardabweichung von T ist ein deutliches Minimum zu erkennen. Alle Werte in cm.

4.2 Mittlere Auslenkung der Drehwaage

Aus der mittleren Auslenkung des Zeigers $\bar{y}$ können wir die mittlere Auslenkung der Drehwaage φ bestimmen. Aus dem geometrischen Aufbau folgt

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \arctan \frac{|\bar{y} - y(t=0)|}{l}. \tag{6}$$

Aus der Gaußschen Fehlerfortplanzung folgt

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_{\bar{y}}}{2l} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(\bar{y}-y(t=0))^2}{l^2}}. \tag{7}$$

4.3 Gravitationskonstante

Aus T und φ können wir nach Formel (4) die Gravitationskonstante bestimmen. Mit α bezeichnen wir die eingestellte Auslenkung. Dabei haben wir drei fehlerbehaftete Größen: α, φ und T. Daraus ergibt sich folgende Fehlerabschätzung: Sei $\text{🦇} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sigma_\gamma^2 = \sigma_\varphi^2 \cdot \left[4\pi^2 \frac{\text{🦇}^{3/2} \cdot (a^2 + \frac{2}{5}r^2)}{abM\sin\alpha\ T^2}\right]^2 + \sigma_T^2 \cdot \left[8\pi^2\varphi\ \frac{\text{🦇}^{3/2} \cdot (a^2 + \frac{2}{5}r^2)}{abM\sin\alpha\ T^3}\right]^2 \\ + \sigma_\alpha^2 \cdot \left[4\pi^2\varphi \cdot \frac{a^2 + \frac{2}{5}r^2}{abMT^2} \cdot \frac{\text{🦇}^{1/2} \cdot 3ab\sin^2\alpha - \text{🦇}^{3/2} \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right]^2.\end{aligned}$$

4.4 Torsionsmodul des Torsionsfadens

Umformen von Gleichung (2) und (3) führt zu folgender Formel für das Torsionsmodul G:

$$G = 4a\gamma L_F \cdot \frac{Mm\sin\beta}{d^2\pi r_F^4\varphi} = 4ab\gamma \cdot \frac{MmL_F\sin\alpha}{\text{🦇}^{3/2}\pi\varphi r_F^4} \tag{8}$$

Nach der Gaußschen Fehlerfortplanzung gilt

$$\sigma_G^2 = \left[\sigma_{L_F} \cdot 4ab\gamma \cdot \frac{Mm\sin\alpha}{\text{🦇}^{3/2}\pi\varphi r_F^4}\right]^2 + \left[\sigma_\varphi \cdot 4ab\gamma \cdot \frac{MmL_F\sin\alpha}{\text{🦇}^{3/2}\pi\varphi^2 r_F^4}\right]^2. \tag{9}$$

5 Ergebnisse

5.1 Messung 1

Der zeitliche Verlauf von y ist in Abb. 5 dargestellt. Es ergeben sich ein Mittelwert $\bar{y} = (71.7 \pm 0.5)$ cm und die in Abb. 4 dargestellten Nullstelllen. Daraus folgt eine Periodendauer von $T = (567 \pm 4)$ s.

Jetzt können wir nach Formel (5) die mittlere Auslenkung der Drehwaage berechnet. Es ergibt sich ein Wert von

$$\varphi = 0.026 \pm 0.001.$$

Nullstellen	133	415	699	981	1267	1548	1832	2114	2396	2683
$T/2$		282.6	283.6	282.2	285.8	281.4	283.3	282	282.7	286.5

Abbildung 4: Nullstellen der Messung 1. Alle Angaben in Sekunden

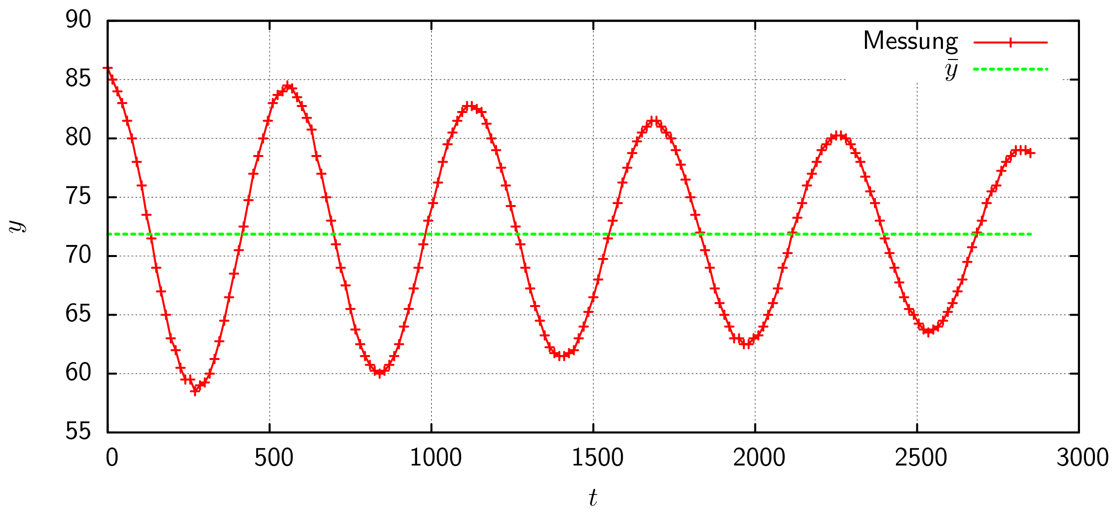

Abbildung 5: Auftragung der Auslenkungen aus Versuch 1

Nullstellen	129	418	699	984	1270	1555	1837	2125	2407	2694
$T/2$		288.6	281.5	285.5	285.4	284.7	282.8	287.2	282	287.1

Abbildung 6: Nullstellen der Messung 2. Alle Angaben in Sekunden

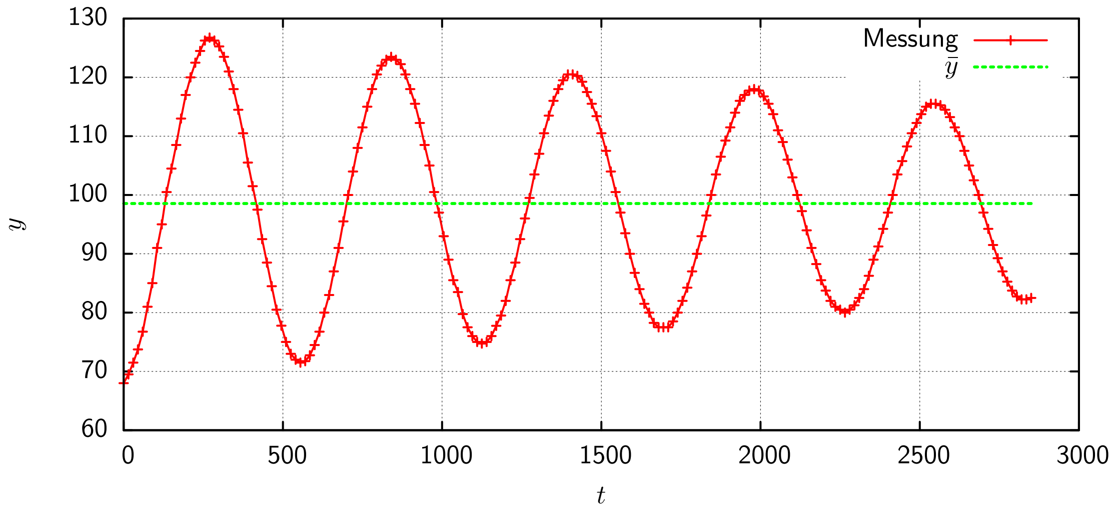

Abbildung 7: Ergebnisse aus Versuch 2

Daraus folgt mit einer Genauigkeit für α von 2° für die Gravitationskonstante

$$\gamma = (7.0 \pm 0.3) \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}.$$

5.2 Messung 2

Der zeitliche Verlauf von y ist in Abb. 7 dargestellt. Es ergeben sich ein Mittelwert $\bar{y} = (98.5 \pm 0.5)$ cm und die in Abb. 6 dargestellten Nullstelllen. Daraus folgt eine Periodendauer von $T = (570 \pm 5)$ s.

Jetzt können wir nach Formel (5) die mittlere Auslenkung der Drehwaage berechnet. Es ergibt sich ein Wert von

$$\varphi = 0.023 \pm 0.001.$$

Daraus folgt mit einer Genauigkeit für α von 2° für die Gravitationskonstante

$$\gamma = (6.1 \pm 0.3) \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}.$$

5.3 Gravitationskonstante aus beiden Messungen

Als gewichteter Mittelwert aus beiden Messungen ergibt sich

$$T = (568 \pm 3)\ \mathrm{s}$$

und

$$\Delta y := |\bar{y} - y(t=0)| = (13.4 \pm 0.4)\ \mathrm{cm}.$$

Daraus folgt die Gravitationskonstante

$$\gamma = (6.6 \pm 0.2) \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}. \tag{10}$$

5.4 Torsionsmodul des Torsionsfadens

Für das Torsionsmodul erhalten wir nach (7)

$$G = (131 \pm 2)\ \mathrm{GPa}, \tag{11}$$

wobei wir einen Literturwert von $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$ verwendet haben. [1, S. 1050]

6 Diskussion

Die erzielten Messergebnisse für Gravitationskonstante sind trotz des geringen experimentellen Aufwandes recht nahe am Literaturwert. Betrachtet man die einzelnen Komponenten der Gaußschen Fehlerfortplanzung für γ, fällt auf, dass der Fehler vor allem durch die Ungenauigkeit von φ entsteht. Diese besteht vor allem im Ablesen an der Skala. Die Genauigkeit wird hier zum Einen durch die Skala, zum anderen durch die Dicke des Laser-Pointers begrenzt. Insgesamt ist der Fehler beider Messungen zusammen im Vergleich zum Literaturwert [1, S. 1050] kleiner als 2 %.

Es ist außerdem zu erwarten, dass diverse systematische Fehler während der Messung auftreten. So werden z.B. die kleinen Kugeln nicht nur von den großen Kugeln angezogen, sondern auch von anderen nahen Massen. Diese systematischen Fehler werden durch die Mittellung von Messung 1 und Messung 2 minimiert.

Ein kritischer Punkt in der Auswertung der Daten besteht im Finden der Ruhelage, da sich das System sehr langsam einschwingt. Das verwendete Verfahren zur Bestimmung der Ruhelage erzielt dabei gute Ergebnisse: Der in Abb. 3 dargestellte Graph zeigt ein deutliches Minimum. Bemerkenswert ist auch, dass die Genauigkeit der Bestimmung von $T/2$ mit 1.6 s rund eine Größenordnung unter der Abtastrate von 15 s liegt. Dies ist durch die genaue Interpolation und Berücksichtigung vieler Nullstellen möglich.

Literatur

[1] Dieter Meschede (2010): *Gerthsen Physik*, 24. Auflage, Springer Heidelberg Dordrecht London New York