Versuch 3:
Das Trägheitsmoment

Inhaltsverzeichnis

Praktikanten:
Fabian Heimann,
Lars Niklas Brinkschmidt

Durchführung:
02.05.2013

1 Einleitung

Drehbewegungen spielen bei der physikalischen Beschreibung von Vorgängen eine wichtige Rolle, wie an zahlreichen Beispielen klar wird (z.B. Straßenverkehr, Festplatten, Pohlscher Resonator).

Eine zentrale Größe der Drehbewegung ist das Trägheitsmoment Θ. Es entspricht der Masse bei Translationsbewegungen und gibt ein Maß für den Widerstand eines starren Körpers gegen eine Änderung seiner Rotationsbewegung an. Die im Folgenden vorgestellten Versuche behandeln dieses Thema. Zum Einen stellen wir einen Versuch vor, bei dem Trägheitsmomente auf verschiedene Art und Weise bestimmt werden.

2 Theorie

2.1 Trägheitsmoment und Satz von Steiner

Betrachten wir einen starren Körper, der um eine gegebene Achse rotiert. Sei ρ die Dichteverteilung innerhalb des Körpers. Dann ist das Trägheitsmoment Θ wie folgt definiert

$$\Theta = \int_V r_\perp^2 \cdot \rho \, \mathrm{d}V. \tag{1}$$

Dabei bezeichnet $r_\perp$ den senkrechten Abstand zur Drehachse und $\mathrm{d}V$ das infinitesimale Volumenelement. Bei konstanter Dichteverteilung kann die Dichte ausgeklammert werden. Für diskrete Massenverteilungen gilt

$$\Theta = \sum_i r_\perp^2 m_i.$$

Oft ist das Trägheitsmoment für eine Achse durch den Schwerpunkt Θ_A eines Körpers bekannt, man will aber das Trägheitsmoment für eine parallele Drehachse Θ_B berechnen. Dann gibt der *Satz von Steiner* einen Zusammenhang, der vom Abstand d zwischen den beiden Achsen und der Gesamtmasse des Körpers m abhängt:

$$\Theta_B = \Theta_A + md^2 \tag{2}$$

Für eine Herleitung aus der Definition des Trägheitsmomentes sei auf [1, S. 80] verwiesen.

Aus diesen Formeln können wir das Trägheitsmoment für verschiedene Körper der Masse m mit homogener Massenverteilung berechnen.

2.2 Kinematik der Rotationsbewegung

Die Kinematik der Rotationsbewegung verhält sich an vielen Stellen analog zur Kinematik der Translationsbewegung. Für einen übersichtlichen Vergleich der verschiedenen Größen sei auf [1, S. 84] verwiesen. Analog zur Position haben wir bei der Rotation die Phase φ, analog zur Geschwindigkeit die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$. Nun führen wir den

Drehimpuls $\vec{L}$ für eine diskrete Massenverteilung für Teilchen an den Stellen $\vec{r_i}$ mit Impuls $\vec{p_i}$ ein als

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{p_i}. \tag{3}$$

Analog zur Kraft ergibt sich dann das Drehmoment $\vec{M}$ als $\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \Theta \cdot \dot{\vec{\omega}}$. Zur praktischen Berechnung von $\vec{M}$ für eine Kraft $\vec{F}$, die an der Stelle $\vec{r}$ angreift, gilt folgende Formel: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ($M =$ konst.) gilt analog zur gleichmäßig beschleunigten Translationsbewegung

$$\omega = \frac{M}{\Theta} t, \qquad \varphi = \frac{1}{2} \frac{M}{\Theta} t^2. \tag{4}$$

Drehschwingungen Analog zum Hookschen Gesetz gilt für eine Spiralfeder mit Winkelrichtgröße k folgender Zusammenhang

$$M = -k \cdot \varphi = \Theta \cdot \ddot{\varphi}. \tag{5}$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung lässt sich z.B. durch Kreisfunktionen finden. Für die Frequenz der entstehenden Schwingung ω' gilt dann $\omega' = \sqrt{k/\Theta}$. Einsetzen von $\omega' = 2\pi/T_S$ und Umformen führt zu der Gleichung

$$\Theta = k \frac{T_S^2}{4\pi^2}. \tag{6}$$

Hierbei bezeichnet T_S die Periodendauer der Schwingung.

Trägheitsellipsiod Der Trägheitsellipsiod beschreibt das Trägheitsmoment eines 3-dimensionalen starren Körpers entlang einer beliebigen Raumrichtung. Charakteristisch hierfür sind die sog. Hauptträgheitsachsen. Per Definition ist das Trägheitsmoment entlang der ersten Hauptachse maximal, entlang der dritten minimal. Die zweite Hauptträgheitsachse ergibt sich aus der Eigenschaft, dass die drei Hauptträgheitsachsen senkrecht aufeinander stehen. Wir können dadurch eine Größe, wie z.B. den Drehimpuls entlang dieser Achsen angeben, anstatt $x-$, $y-$ und $z-$Koordinaten zu verwenden.

Die Geschwindigkeit eines einzelnen Teilchens ergibt sich bei einer Drehbewegung aus der Winkelgeschwindigkeit:

$$\vec{v_i} = \vec{\omega} \times \vec{s} r_i.$$

Zusammen mit (3) ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das nach Transformation auf die Hauptachsen A, B und C folgende Form annimmt:

$$L_A = \Theta_A \cdot \omega_A, \quad L_B = \Theta_B \cdot \omega_B, \quad L_C = \Theta_C \cdot \omega_C. \tag{7}$$

Ist eine der Winkelgeschwindigkeiten 0 ($\omega_C = 0$), ergibt sich für das Skalarprodukt zwischen ω und L folgendes: $\Theta\omega^2 = \Theta_A \cdot \omega_A^2 + \Theta_B \cdot \omega_B^2$. Mit $\omega_A = \omega \cos\alpha$, $\omega_B = \omega \cos\beta$ erhalten wir daraus die Ellipsengleichung

$$1 = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{b^2} \quad \text{mit} \quad \Theta_A = \frac{1}{a^2}, \quad \Theta_B = \frac{1}{b^2}, \quad \xi = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\Theta}}, \quad \zeta = \frac{\cos\beta}{\sqrt{\Theta}}. \tag{8}$$

Dabei sind a und b die Halbachsen der Ellipse, α und β die jeweiligen Winkel zur Hauptachse.

Physikalisches Pendel Unter einem physikalischen Pendel versteht man einen an einem Punkt außerhalb des Schwerpunktes aufgehängten Körper der Masse m mit einem Trägheitsmoment Θ, der ausgelenkt wird und aufgrund der Schwerkraft um seine Ruhelage schwingt. Die Schwerkraft mg führt also zu einem Drehmoment $M = -rmg\sin\varphi$, wobei φ die Auslenkung bezeichnet und r den Abstand des Angriffspunktes der Kraft zum Rotationszentrum. Mit der Kleinwinkelnäherung und $M = \Theta \cdot \dot{\varphi}$ erhalten wir eine Differentialgleichung, die analog zu der eines mathematischen Pendels mit der Fadenlänge $l = \frac{\Theta}{mr}$ ist. [3, S. 305]

Es ergibt sich folgende Schwingungsfrequenz ω [3, S. 306]

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{\Theta}}.$$

Drücken wir ω als $\frac{2\pi}{T}$ aus und formen nach Θ um, erhalten wir

$$\Theta = \frac{mgrT^2}{4\pi^2}. \tag{9}$$

Hierbei ist T die Periodendauer der Schwingung des Pendels.

3 Durchführung

Der Versuch besteht aus zwei Teilen.

3.1 Teil A: Trägheitsmoment aus Drehschwingungen

Im Teil A soll das Trägheitsmoment verschiedener Körper (Würfel, Kugel, Zylinder, Hohlzylinder, Hantel, Stab und Tischchen) aus dem Schwingungsverhalten bei einer Drehschwingung bestimmt werden. Außerdem soll das Ergebnis mit dem theoretischen Wert verglichen werden. Daher werden als erstes alle verwendeten Körper gewogen und ausgemessen. Zur praktischen Bestimmung des Trägheitsmomentes wird der Körper an einer Spiralfeder befestigt und ausgelenkt (siehe Abb. 1). Dann wird die Schwingungsdauer gemessen, aus der das Träheitsmoment bestimmt werden kann. Dazu muss zuerst die Winkelrichtgröße der verwendeten Feder bestimmt werden. Dazu wird sie vertikal eingespannt und mit verschiedenen Gewichten belastet. Gemessen wird dann die Auslenkung abhängig vom Gewicht für die Gewichte 10g, 15g, 20g und 50g.

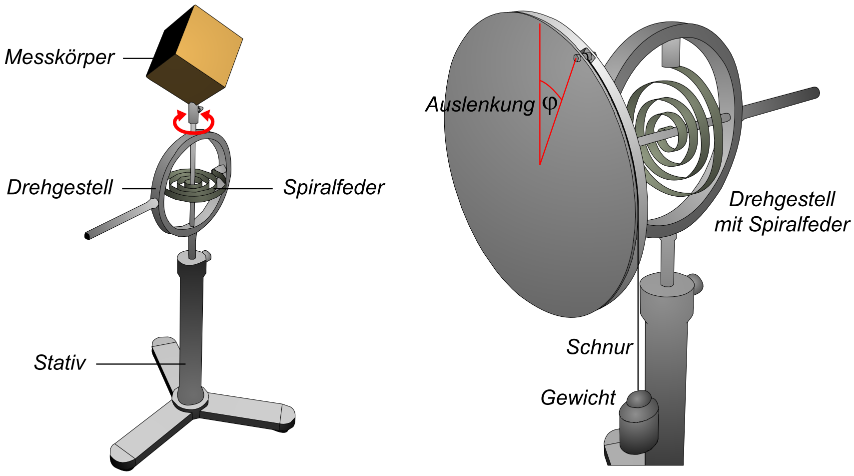

Abbildung 1: Aufbau Teil A: Links ist der Versuchsaufbau zur Bestimmung der Schwingungsdauer der Drehschwingung dargestellt, rechts der zur Messung der Winkelrichtgröße[4]

Danach wird dann die Schwingungsdauer der Drehschwingung für die Körper Würfel, Kugel, Zylinder, Hohlzylinder, Hantel und Stab jeweils 3 mal für jeweils 10 Schwingungen gemessen, um die Genauigkeit zu erhöhen. Beim Würfel wird dies sowohl für die Drehachse durch die Flächenmitte sowieso für die Drehachse durch die Ecke getan, beim Stab für zwei versetzte Achsen, von denen eine nicht durch den Schwerpunkt geht.

Als letztes wird die Schwingungsdauer für das Tischchen bestimmt. An ihm wird in 15°-Schritten der Winkel senkrecht zur Rotationsachse eingestellt und jeweils eine Messung durchgeführt.

3.2 Teil B: Trägheitsmoment aus Winkelbeschleunigung

Im Teil B soll das Trägheitsmoment eines Rades bestimmt werden. Dazu verwenden wir folgenden Versuchsaufbau, der auch in Abb. 2 dargestellt ist: Ein Rad ist an seiner Rotationsachse aufgestellt. Außen am Rad ist rundherum Registrierpapier befestigt. An der Achse des Rades hängt ebenfalls ein kleineres Rad, an dem ein Gewicht mit einem Bindfaden angebracht ist. Neben dem Rad steht ein Zeitmarkengeber, der mit einer Frequenz von 10 Hz Markierungen auf das Registrierpapier zeichnet.

Für den Versuch werden Gewichte mit den Massen 100g, 200g, 300g, 1 kg an das Rad gehängt und fallen gelassen. Dadurch wird das Rad beschleunigt. Die Bewegung des Rades wird dann durch den Zeitmarkengeber auf dem Registrierpapier aufgezeichnet.

In einem zweiten Teil wird an einer Speiche des Rades ein Zusatzgewicht angebracht. Dadurch erhalten wir den Aufbau eines physikalischen Pendels. Dessen Schwingungsfrequenz wird mit einer Stoppuhr bestimmt. Dazu messen wir die Dauer von 10 Schwingungen, einmal von der einen Seite und dann von der diametral gegenüberliegenden Seite.

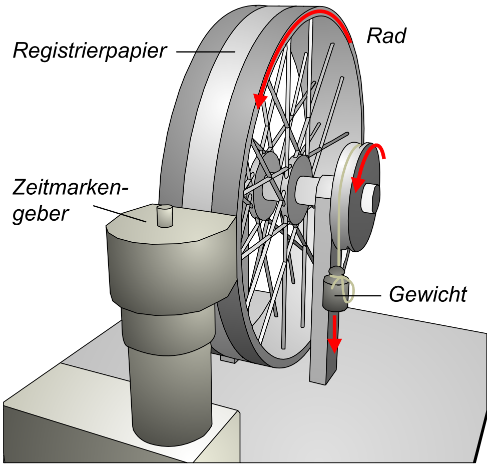

Abbildung 2: Aufbau Teil B: Ein Rad ist an seiner Rotationsachse aufgestellt. Außen am Rad ist rundherum Registrierpapier befestigt. An der Achse des Rades hängt ebenfalls ein kleineres Rad, an dem ein Gewicht mit einem Bindfaden angebracht ist. Neben dem Rad steht ein Zeitmarkengeber, der mit einer Frequenz von 10 Hz Markierungen auf das Registrierpapier zeichnet.

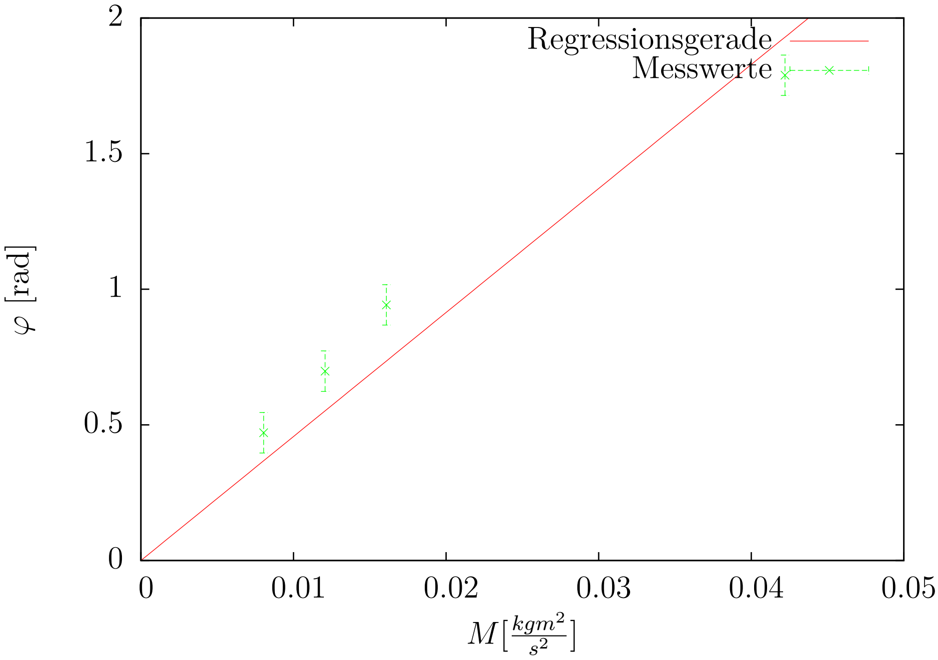

Abbildung 3: Messwerte und Regressionsgrade

4 Auswertung

4.1 Trägheitsmomente der Körper

Die Trägheitsmomente der verschiedenen Körper können einerseits über Gestalt und Masse der Körper, aber auch über die Periodendauer mit bekannter Winkelrichtgröße k bestimmt werden. Diese lässt sich über das Drehmoment M bestimmen, für das in diesem Fall gilt:

$$M = |\vec{M}| = |\vec{F} \times \vec{r}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| = gmr, \tag{10}$$

wobei g die Erdbeschleunigung, m die Masse des angehängten Gewichtstücks und r der Radius der Drehscheibe ist.
Durch ermitteln eines Zusammendhangs zwischen Winkelausschlag und Drehmoment mittels linearer Regression, kann die Proportionlitätskonstante k bestimmt werden. Die Feder wurde in beide Richtung ausgelenkt, dann der Mittelwert bestimmt. Da die Feder in die eine Richtung gedehnt, in die andere jedoch gestaucht wird, kommt es zu unterschiedlichen Ergebnissen. Für die Winkelausschläge wurde ein Fehler von 10° angenommen. So ergibt sich aus Tabelle 1 und dem Graphen aus Abbildung 3 für k ein Wert von [0.0222 $\pm$ 0.0018] Nm
Das Trägheitsmoment Θ lässt sich jetzt berechnen mit

$$\Theta = k \cdot \left(\frac{T_s}{2\pi}\right)^2$$

$m\ [kg]$	$\varphi\ [°]$	$\varphi\ [rad]$	$M[\frac{kgm^2}{s^2}]$
0.00	0.0	0.0	0.0
0.010	27	0.4712	0.008044
0.015	40	0.6981	0.012066
0.02	54	0.9425	0.016088
0.05	102.5	1.789	0.04221

Tabelle 1: Winkelausschlag in Grad und Bogenmaß, erzeugendes Drehmoment M, bei $r = 82mm$

Körper	$\Theta \cdot 10^{-4}[kgm^2]$ theor.	$\Theta \cdot 10^{-4}[kgm^2]$ exp.
Kugel	4.05	4.3 ± 3.4
Vollzylinder	2.32	2.7 ± 2.6
Hohlzylinder	5.58	5.6 ± 3.9
Hantel	54.67	52.6 ± 14.4
Würfel [Mitt.pkt.]	4.88	4.7 ± 3.6
Würfel [Ecke]	4.88	4.8 ± 3.6
Stab [Schwerpkt.]	33.75	27.5 ± 9.4

Tabelle 2: Theoretische und experimentelle Trägheitsmomente für verschiedene Körper mit Fehler

und der Fehler σ_Θ über die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung mit

$$\sigma_\theta = \sqrt{\sigma_k^2 \left(\frac{T_s}{2\pi}^2\right)^2 + \sigma_{T_s}^2 \left(\frac{2kT_s}{4\pi^2}\right)^2}$$

So ergeben sich für die restlichen Körper die Werte zu sehen in Tabelle 2 Die theoretischen Werte wurde über Gestalt und Masse der Körper berechnet. Die Formeln sind

- Eine Kreisscheibe mit Radius r hat das Trägheitsmoment $\frac{1}{2}mr^2$. [1, S. 80] Drehachse ist die Symmetrieachse.
- Eine Kugel mit dem Radius r hat das Trägheitsmoment $\frac{2}{5}mr^2$. [1, S. 80] Drehachse geht durch den Mittelpunkt.
- Ein Stab der Länge l hat das Trägheitsmoment $\frac{1}{12}ml^2$. [1, S. 80] Drehachse durch die Mitte und senkrecht zur Stabrichtung.
- Ein Würfel der Kantenlänge a hat das Trägheitsmoment $\frac{1}{6}ma^2$. [1, S. 80] Drehachse durch den Mittelpunkt und senkrecht zur Oberfläche oder durch eine Diagonale.

φ [°]	$\Theta \cdot 10^{-4}[kgm^2]$	$\sqrt{\Theta}[\sqrt{kg}m]$
0	3.5628	0.01888 $\pm 0,0004$
15	3.3773	0.01838 $\pm 0,0004$
30	3.5004	0.01871 $\pm 0,0004$
45	3.8550	0.01963 $\pm 0,0004$
60	4.3347	0.02082 $\pm 0,0004$
75	4.8529	0.02203 $\pm 0,0005$
90	5.2146	0.02284 $\pm 0,0005$
105	5.3344	0.02310 $\pm 0,0005$
120	5.0215	0.02241 $\pm 0,0005$
135	4.8008	0.02191 $\pm 0,0005$
150	4.4041	0.02099 $\pm 0,0005$
165	4.0818	0.02020 $\pm 0,0004$
180	3.6529	0.01911 $\pm 0,0004$
195	3.3686	0.01835 $\pm 0,0004$
210	3.4474	0.01857 $\pm 0,0004$
225	3.7258	0.01930 $\pm 0,0004$
240	4.2365	0.02058 $\pm 0,0004$
255	4.7800	0.02186 $\pm 0,0005$
270	5.1498	0.02269 $\pm 0,0005$
285	5.4003	0.02324 $\pm 0,0005$
300	5.2038	0.02281 $\pm 0,0005$
315	4.8216	0.02196 $\pm 0,0005$
330	4.3644	0.02089 $\pm 0,0004$
345	3.9017	0.01975 $\pm 0,0004$

Tabelle 3: Trägheitsmoment des Tischchens für verschiedene Drehwinkel und Quadratwurzel des Trägheitsmoments

- Ein Zylinder mit Radius r hat das Trägheitsmoment $\frac{1}{2}mr^2$. [2, S. 149]. Drehachse durch die Symmetrieachse.
- Ein Hohlzylinder mit Radius r hat das Trägheitsmoment mr^2. [2, S. 149]. Drehachse durch die Symmetrieachse.
- Eine Hantel mit der Masse m_s des Stabes, der Masse m je eines der beiden Gewichte und der Länge $2l$ hat das Trägheitsmoment $\frac{1}{3}m_s l^2 + 2mL^2$. Drehachse senkrecht zur Stabrichtung. Dies ist direkt aus den obigen Gleichungen ersichtlich.

4.2 Trägheitsmomente des Tischchens

Trägt man nun die Werte für die Quadratwurzel von Θ aus Tabelle 3 in einem Trägheitsellipsoid auf wie in Abbildung 4, kann man aus der Analyse des Diagrams die Hauptträgheitsachsen bei 15° und 105° ermitteln.

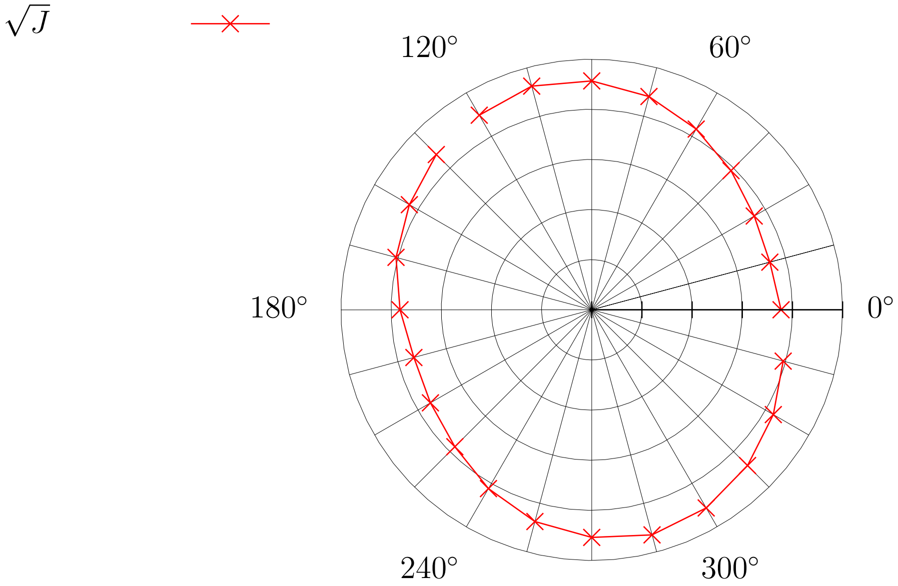

Abbildung 4: Trägheitsellipsoid. Die Quadratwurzel des Trägheitsmoment eines Tischchens aufgetragen gegen die Auslenkung aufgetragen

4.3 Trägheitsmoment des Rades durch Winkelbeschleunigung

Trägt man die Abstände der Markierungen auf dem Papierstreifen gegen die Zeit auf, wie in Abbildung 5, so kann man die Winkelbeschleunigung durch lineare Regressionermitteln und über diese das Trägheitsmoment des Rades. Durch den Faden an dem ein Massestück der Masse M hängt, wirkt eine Kraft F auf das Schwungrad, für die gilt $F_{Faden} = mg - ma' = m(g - a')$., Für das Drehmoment gilt also $M \ = \ F_{Faden} \cdot r$ (vgl Gleichung 10). Für das Drehmoment gilt aber auch $M \ = \ J\alpha$. mit $\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \alpha$.
Stellt man nach J um und setzt für M ein, so ergibt sich

$$J \ = \ \frac{M}{\alpha} \ = \ \frac{F_{Faden} \cdot r}{\alpha} \ = \ \frac{m(g - a')r}{\alpha}.$$

Wenn man nun betrachtet, dass $\omega \ R \ = \ v$ und damit $\dot{\omega} \ R \ = \ \dot{v} \ = \ a$ ergibt sich

$$\alpha \ = \ \frac{a}{R} \text{ und analog mit } \alpha r = a' : \quad a' \ = \ \frac{a}{R}\, r$$

m [kg]	$a\ [m\,s^{-1}]$	$\sigma_a\ [m\,s^{-1}]$	$J\ [kg\,m^2]$	$\sigma_J\ [kg\,m^2]$
0.1	0.1893	0.0270	0.0789	0.0032
0.2	0.3758	0.0280	0.0788	0.0032
0.3	0.8541	0.0352	0.0510	0.0026
1.0	1.6463	0.0499	0.0851	0.0034

setzt man nun ein erhält man:

$$\begin{aligned} J &= \frac{m(g-a')r}{\alpha} \\ &= \frac{m(g-\frac{a}{R}r)rR}{a} \\ &= \frac{(mg-\frac{mar}{R})rR}{a} \\ &= \frac{mgrR}{a} - mr^2. \end{aligned}$$

Für den Fehler gilt dann folglich

$$\sigma_J = \sqrt{\sigma_r^2\left(\frac{Rgm}{a} - 2mr\right)^2 + \sigma_R^2\left(\frac{gm}{a}\right)^2 + \sigma_a^2\left(-\frac{rRmg}{a^2}\right)^2}$$

4.4 Physikalisches Pendel

Gleichung 9 gibt eine Formel das Trägheitsmoment eines schwingenden Rades. Um das Trägheitsmoment des Rades im Experiment zu besimmen, muss noch das Trägheitsmoment des Massestücks J_m abgezogen werden, für das gilt $J_m = m \cdot z^2$, wobei z der Abstand vom Mittelpunkt ist. Also gilt

$$J_{Rad} = J - m_z z^2 = \frac{m_z g z T^2}{4\pi^2} - m_z z^2.$$

Der Fehler ergibt sich aus Gauß'scher Fehlerfortpflanzung mittels

$$\sigma_J = \sqrt{\sigma_z^2\left(\frac{m_z g T^2}{4\pi^2} - 2m_z z\right)^2 + \sigma_T^2\left(\frac{2mgzT}{4\pi^2}\right)^2 + \sigma_m^2\left(\frac{gzT^2}{4\pi^2} - z^2\right)^2}.$$

Aus unseren Messdaten ergeben sich dann $J = 0.075\ kg\,m^2$ mit einem Fehler $\sigma_J = 0.002\ kg\,m^2$.

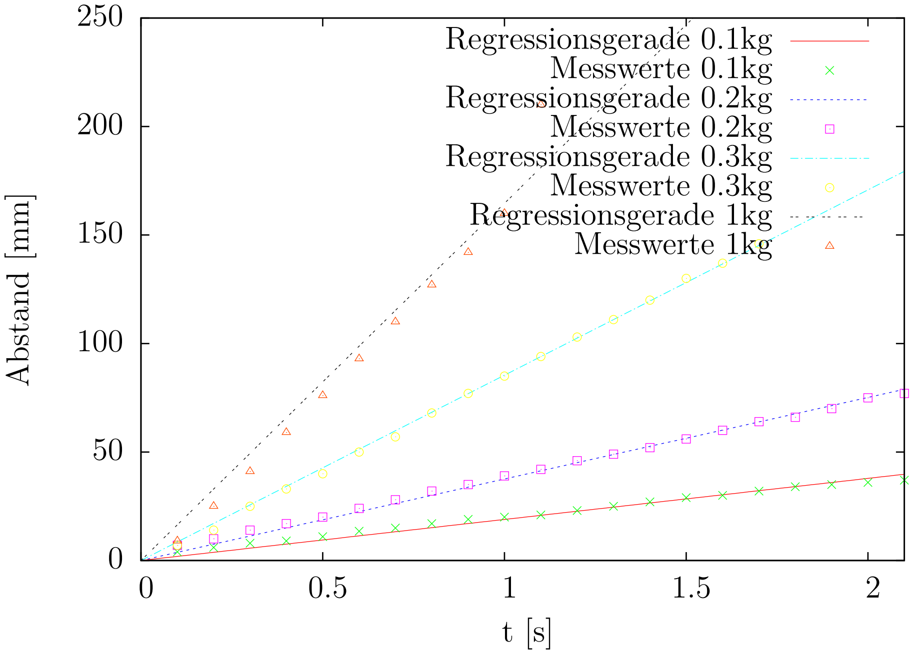

Abbildung 5: Messwerte und Regressionsgrade zur Winkelbeschleunigung

5 Diskussion

Die Messwerte aus Versuchsteil A liegen alle sehr nah (eine Abweichung von kleiner als 10%) an den Werten, die aus den Werten für Gestalt und Form gewonnen wurden. Alleine der Stab weist einen größeren Unterschied auf, mit einer Abweichung von über 23%. Sie weisen allerdings relativ hohe Fehler auf, was vor allem daran liegt, dass wir die Fehler einiger Messung, auf Grund ihrer, uns unsicher erscheinenden Vorgehensweise, wohl zu groß geschätzt haben. Dennoch sind diese Ergebnisse zufriedenstellend, eine Minimierung der Fehler wäre allerdings noch zu erstreben. Fehlerquellen liegen hier sich in der Nur sehr ungenau möglichen Bestimmung der Auslenkung der Kreisscheibe bei der Bestimmung der Winkelrichtgröße. Das Trägheitsellipsoid ließ sch sehr gut auswerten und kommt der theoretischen Form sehr nahe. Die Ergebnisse für das Trägheitsmoment des Rades aus Versuchsteil B liegen alle sehr dicht zusammen mit einer Abweichung von 7,9% oder liegen sogar auf unter 1% zusammen. Einzig der Wert für eine Beschleunigung durch 0.3kg weicht mit 35% ab.

Literatur

[1] Dieter Meschede (2010): *Gerthsen Physik*, 24. Auflage, Springer Heidelberg Dordrecht London New York

[2] Wolfgang Demtröder (2008): *Experimentalphysik I: Mechanik und Wärme*, 5. Auflage, Springer Berlin Heidelberg

[3] Wolfgang Nolting (2011): *Grundkurs Theoretische Physik 1: Klassische Mechanik*, 9. Auflage, Springer Heidelberg Dordrecht London New York

[4] *Lernportal der Universität Göttingen: Trägheitsmoment*, `https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3606`, abgerufen 14.5.2013