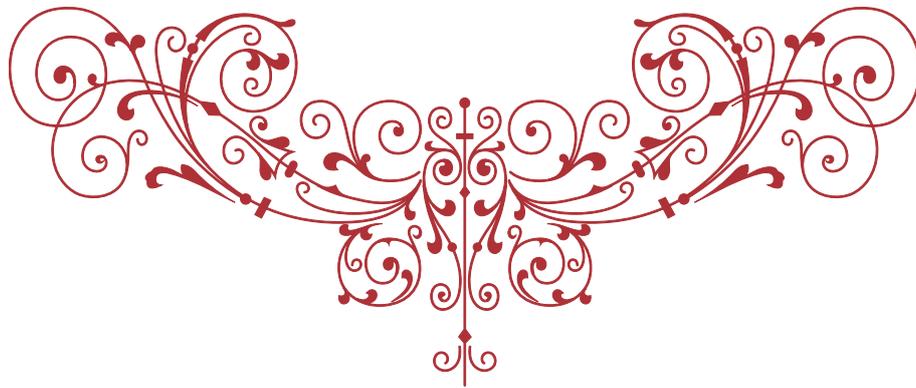


---

**Versuch 4:  
Kreiselpräzession**

---



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Allgemeines zur Rotation von Körpern . . . . .	3
2.2	Die Eulersche Kreiselgleichung . . . . .	3
2.3	Nutation . . . . .	3
2.4	Präzession . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
3.1	Aufbau . . . . .	5
3.2	Durchführung . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
4.1	Trägheitsmoment aus Abmessungen . . . . .	8
4.1.1	Trägheitsmoment um die horizontale Achse . . . . .	8
4.1.2	Trägheitsmoment um die vertikale Achse . . . . .	8
4.2	Trägheitsmoment aus physikalischem Pendel . . . . .	9
4.3	Präzessionsfrequenz . . . . .	9
4.4	Nutationsfrequenz . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>12</b>



PRAKTIKANTEN:  
Fabian Heimann,  
Lars Niklas Brinkschmidt

DURCHFÜHRUNG:  
16.05.2013

# 1 Einführung

In diesem Versuch findet eine Untersuchung der Bewegung starrer Körper statt, insbesondere der Präzision eines Kreisel. In der Himmelsmechanik finden sich zahlreiche Beispiele für die Wichtigkeit dieses Phänomens.

## 2 Theorie

### 2.1 Allgemeines zur Rotation von Körpern

Ein starrer Körper der um eine Achse rotiert, hat eine Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega} = \frac{2\pi}{T}$ , wobei  $T$  die Periodendauer ist. Auf die Herleitung von Formeln in Bezug auf das Trägheitsmoment wird hier verzichtet, diese sind im letzten Protokoll nachzulesen. Der Drehimpuls  $\vec{L}$  eines Körpers mit Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  und Trägheitsmoment  $J$  lautet dann

$$\vec{L} = \vec{\omega} \cdot J.$$

Das zugehörige Drehmoment ist dann  $\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ .

### 2.2 Die Eulersche Kreiselgleichung

Bei beliebiger Richtung der Drehachse  $\vec{\omega}$  sind Drehimpuls  $\vec{L}$  und Drehachse  $\vec{\omega}$  nicht mehr parallel, die Bewegung des Körpers wird dann komplizierter. Um dann quantitative Beschreibungen zu ermöglichen, muss die Bewegung des Körpers in einem raumfesten Koordinatensystem dargestellt werden. Die zeitliche Änderung  $\frac{d\vec{L}}{dt}$  des Drehimpulses ist im raumfesten Inertialsystem gleich dem äußeren Drehmoment  $\vec{D}$ . Die Eulersche Kreiselgleichung beschreibt nun den Drehimpuls eines fest mit dem Körper verbundenen Koordinatensystems.

$$\left( \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} \right)_{\text{Raum}} = \left( \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} \right)_{\text{Körper}} + \vec{\omega} \times \vec{L}. \quad (1)$$

Der zweite Term, oft Coriolis-Term genannt, beschreibt die Veränderungen in Bezug auf die Drehachse des Systems.

### 2.3 Nutation

Zur Erklärung der Nutation ist zunächst die Klärung einiger Begriffe wichtig. Als *Figurenachse* wird hier eine Achse bezeichnet, um die der Körper rotations-symmetrisch ist; sie geht folglich durch den Schwerpunkt des Körpers. Ein Kreisel, der schief in Bewegung gesetzt wurde oder ausgelenkt wurde, hat keine Raumfeste *Figurenachse* mehr, sie beschreibt dann einen Kegelmantel, den sogenannten *Nutationskegel*. Die *momentane Drehachse*  $\vec{\omega}$  liegt dann nicht mehr mit der *Figurenachse* zusammen, sondern bewegt sich ebenfalls auf einem Kegelmantel, dem *Rastpolkegel*. Man kann nun  $\vec{\omega}$  nun in  $\vec{\omega}_1$  und  $\vec{\omega}_2$ , parallel und

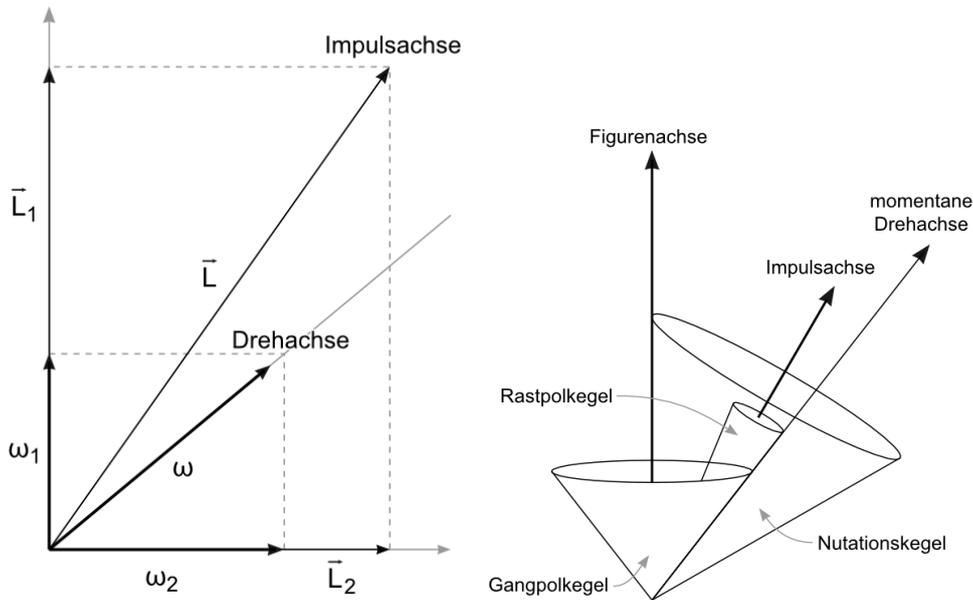


Abbildung 1: Graphische Darstellung der geometrischen Zusammenhänge von *Figuren-achse*, *Nutationskegel*, *momentaner Drehachse*, *Rastpolkegel* und der Zerlegung von  $\vec{\omega}$  [<https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3637> abgerufen am 22.05.13]

senkrecht zur *Figuren-achse* zerlegen. Zu beiden Richtungen gehören zwei verschiedene Hauptträgheitsmomente  $I_1$  und  $I_2$ , es ergeben sich zwei Drehimpulse  $\vec{L}_1$  und  $\vec{L}_2$ , wobei  $\vec{L}_i = I_i \cdot \vec{\omega}_i$  ist. Diese setzen sich zusammen zum Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}_{ges} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ , der wegen dem Energieerhaltungssatz raumfest bleibt. Aus Abb. 1 folgt, dass<sup>1</sup>

$$L = \frac{L_1}{\sin \alpha} = \frac{L_2}{\cos \alpha} \Rightarrow L_2 = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot L_1. \quad (2)$$

Aus  $\omega_1 = \sin \alpha \cdot \omega_N$  ergibt sich nach Umformen und für kleine Winkel  $\alpha$ :

$$\omega_N = \frac{I_1}{I_2 \cdot \cos \alpha} \cdot \omega_1 \approx \frac{I_1}{I_2} \cdot \omega_1, \quad (3)$$

da für kleine Winkel  $\alpha$  gilt  $\sin \alpha \approx \alpha$  und deshalb  $\cos \alpha \approx 1$ . Rollet die Figuren-achse nun auf dem Nutationskegel ab, so kann dies durch ein Abrollen eines Kegels auf der Figuren-achse (dem *Gangpolkegel*) auf dem *Rastpolkegel* interpretiert werden.

## 2.4 Präzession

Wird eine Kraft (ein Drehmoment  $\vec{T}$ ) senkrecht zur Drehimpulsachse des Kreisels ausgeübt, so gilt nach der Bewegungsgleichung:  $\vec{T} = \dot{\vec{L}}$ . Die Änderung des Drehimpulses steht

<sup>1</sup> $V$  ist die vereinfachte Schreibweise für  $|\vec{V}|$ , wobei  $V$  für einen beliebigen Vektor steht.

also immer senkrecht auf der Achsrichtung.  $\vec{L}$  kann sich also der Größe nach nicht ändern, sondern nur seine Richtung. Das Ergebnis ist also eine *Präzessionsbewegung*, die senkrecht zu  $\vec{T}$  ist, wobei gilt:

$$\vec{T} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}. \quad (4)$$

Aus dieser Formel folgt direkt, dass

$$\omega_P = \frac{T}{L \cdot \sin \theta}. \quad (5)$$

Wenn nun das Drehmoment Zusatzgewicht verursacht wird, so folgt, da nur der senkrecht zur geneigten Achse stehende Teil der Gewichtskraft das Drehmoment ausübt,  $T = m \cdot g \cdot z \cdot \sin \theta$ . Durch Einsetzen in Gleichung 5 folgt:

$$\omega_p = \frac{m \cdot g \cdot z}{L} \quad \text{und mit} \quad L = I\omega_R \quad \text{ist} \quad \omega_p = \frac{m \cdot g \cdot z}{I\omega_R} \quad \text{und damit} \\ I = \frac{mgz}{\omega_p\omega_R}. \quad (6)$$

## 3 Durchführung

### 3.1 Aufbau

Der schematische Versuchsaufbau ist in Abb. 2 dargestellt:

Der Kreisel besteht aus einem Rad, das im Mittelpunkt an einer horizontalen Achse befestigt ist, der *Rotationsachse*. Am Rad befindet sich ein Klebestreifen, der dazu genutzt wird die Drehfrequenz des Rades mit Hilfe der Lichtschranke zu messen, in dem er als Impulsgeber für die Schranke dient.

Auf dem Rand des Rades befinden sich zwei diametral gegenüberliegende Gewindelöcher, in welche ein Pendelgewicht eingeschraubt werden kann, um das Rad als Pendel zu benutzen. Das Rad ist mit einer spulenartigen Vorrichtung verbundenen, auf der eine Schnur aufgewickelten werden kann, die schnellen abziehen das Rad in Rotation versetzt.

Am gegenüberliegenden Ende der Rotationsachse befindet sich ein Ausgleichsgewicht. Ebenfalls ist dort eine Kerbe, an der das Zusatzgewicht befestigt wird, welches ein Drehmoment senkrecht zur Rotationsachse ausübt. Die Rotationsachse ist auf der in Abb. 2 rechten vertikalen Achse, der *Präzessionsachse*, drehbar gelagert, so dass sich der gesamte Kreisel um diese Achse drehen kann. Die linke vertikale Achse in Abb. 2 dient zur Fixierung der Rotationsachse, so dass sie genau horizontal ausgerichtet ist und sich nicht um die Präzessionsachse drehen kann. Zur Messung der Präzession kann sie entfernt werden.

### 3.2 Durchführung

- (1) Zur ersten Messung wird ein Zusatzgewicht mit einer bestimmten Masse in eines der Gewindelöcher des Rades geschraubt. Nun wird das so entstandene Pendel ausgelenkt, und über zehn Perioden die Zeit gemessen. Das wird zweimal wiederholt.

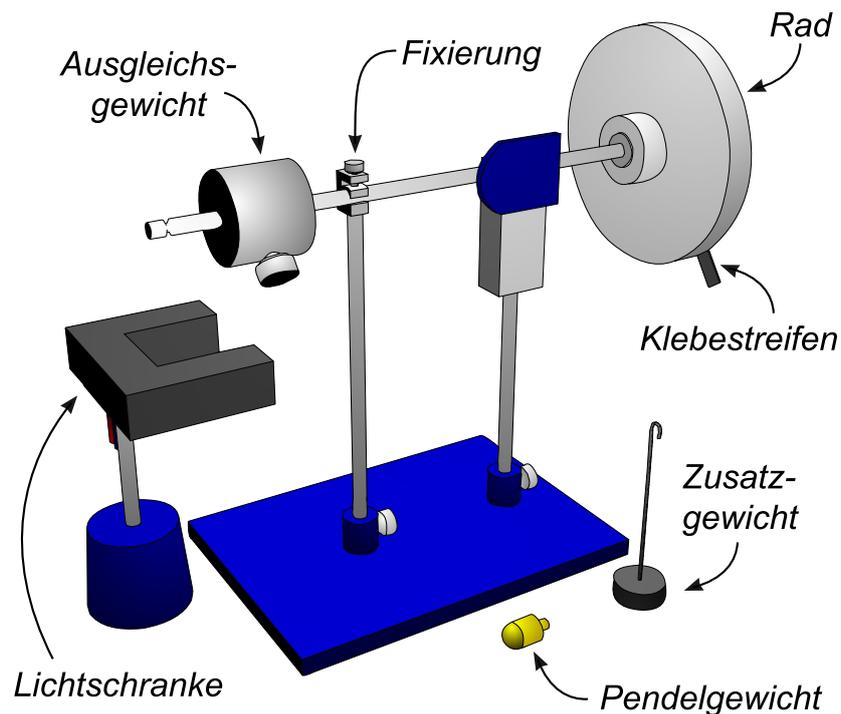


Abbildung 2: Aufbau. Durch das Ausgleichsgewicht befindet sich die Drehachse an der das Rad befestigt ist in der Waage. Die Fixierung kann die Drehachse raumfest machen, wenn keine Nutation gewünscht ist. Das Pendelgewicht kann an dem Rad angebracht werden, um so ein physikalisches Pendel zu erzeugen. Mit Hilfe des Klebestreifens kann mit der Lichtschranke die Periodendauer dieses Pendels gemessen werden. Das Zusatzgewicht kann an in einer Aufhängung hinter dem Ausgleichsgewicht angebracht werden. [<https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3637> abgerufen am 22.05.13]

Anschließend wird das Pendelgewicht im diametral gegenüberliegendem Gewinde-  
loch befestigt und wieder drei Mal über zehn Perioden die Zeit genommen.

- (2) Nun wird die Fixierung entfernt und das Ausgleichsgewicht justiert, so dass die Achse in Waage ist. Das Rad wird mittels einer aufgewickelten und schnell abgezogenen Schnur in Rotation versetzt. Mit der Lichtschranke wird die Periodendauer des Rades gemessen und anschließend ein Zusatzgewicht in der dafür vorgesehenen Kerbe eingehängt. Das Rad beginnt sich um seine Präzessionsachse zu drehen. Die Zeit für einen halben Umlauf wird gemessen, dann erneut die Periodendauer gemessen. Das wird für eineinhalb weitere Umläufe wiederholt. Dann wird das Rad angehalten, das Zusatzgewicht gewechselt, und mit unterschiedlichen Zusatzgewichten insgesamt dreimal durchgeführt.
- (3) Als letztes wird die Nutationsperiode bestimmt: Dazu wird wie in Messung zwei

das Rad mit der Schnur in Drehung versetzt und die Rotationsperiode mit der Lichtschranke gemessen. Nun wird der Rotationsachse ein Stoß gegeben und so das Rad in Nutation versetzt. Die Zeit für 10 Nutationsperioden wird bestimmt. Der gesamte Vorgang wird vier mal wiederholt.

## 4 Auswertung

### 4.1 Trägheitsmoment aus Abmessungen

#### 4.1.1 Trägheitsmoment um die horizontale Achse

Zuerst wollen wir das Trägheitsmoment um die horizontale Achse theoretisch aus Größe und Masse des Rades berechnen. Für eine Kreisscheibe gilt [4, S. 9]

$$\Theta = \frac{1}{2}mr^2. \quad (7)$$

Die Masse und der Durchmesser der Scheibe waren exakt angegeben mit  $m_{\text{Rad}} = 1.324$  kg und  $d = 2r_{\text{Rad}} = 0.245$  m. Daraus ergibt sich  $\Theta_{\text{hor}} = 9.934 \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$ .

#### 4.1.2 Trägheitsmoment um die vertikale Achse

Für das Trägheitsmoment um die vertikale Achse  $\Theta_{\text{vert}}$  müssen mehrere Komponenten berücksichtigt werden. Es setzt sich zusammen aus dem Trägheitsmoment des Rades und dem des Ausgleichsgewichtes.

$$\Theta_{\text{vert}} = \Theta_{\text{Rad}} + \Theta_{\text{Ausgl.-Gew}} \quad (8)$$

Ein Rolle spielen würde z.B. auch das Trägheitsmoment der Achse. Dafür müsste allerdings die Masse der Stange bekannt sein.

Für das Trägheitsmoment des Rades wenden wir die Formel für das Trägheitsmoment einer flachen Scheibe durch eine Rotationsachse senkrecht zur Symmetrieachse [1, S. 80] und den Satz von Steiner[4, S. 3] an. Den Abstand des Schwerpunktes eines Körpers  $k$  von der vertikalen Drehachse bezeichnen wir mit  $d_k$ . Mit  $m_{\text{Rad}}$  für die Masse des Rades gilt

$$\Theta_{\text{Rad}} = \frac{1}{4} \cdot m_{\text{Rad}} \cdot r_{\text{Rad}}^2 + m_{\text{Rad}} \cdot d_{\text{Rad}}^2. \quad (9)$$

Für das Trägheitsmoment des Ausgleichsgewichtes verwenden wir die Formel für eine Punktmasse, da es im Vergleich zu den Abmessungen z.B. des Rades relativ klein war.

$$\Theta_{\text{Ausgl.-Gew}} = m_{\text{Ausgl.-Gew}} \cdot d_{\text{Ausgl.-Gew}}^2. \quad (10)$$

Durch Einsetzen folgt für das gesamte Trägheitsmoment

$$\Theta_{\text{vert}} = \frac{1}{4} \cdot m_{\text{Rad}} \cdot r_{\text{Rad}}^2 + m_{\text{Rad}} \cdot d_{\text{Rad}}^2 + m_{\text{Ausgl.-Gew}} \cdot d_{\text{Ausgl.-Gew}}^2. \quad (11)$$

Die Größen  $d_{\text{Rad}}$  und  $d_{\text{Ausgl.-Gew}}$  sind fehlerbehaftet. Nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung gilt

$$\sigma_{\Theta_{\text{vert}}}^2 = [2m_{\text{Rad}} \cdot d_{\text{Rad}} \cdot \sigma_{d_{\text{Rad}}}]^2 + [2 \cdot m_{\text{Ausgl.-Gew}} \cdot d_{\text{Ausgl.-Gew}} \cdot \sigma_{d_{\text{Ausgl.-Gew}}}]^2. \quad (12)$$

Mit den gemessenen Werten  $d_{\text{Rad}} = (12.5 \pm 0.5)$  cm,  $d_{\text{Ausgl.-Gew}} = (16.6 \pm 0.3)$  cm und  $m_{\text{Ausgl.-Gew}} = 0.936$  kg folgt  $\Theta_{\text{vert}} = (51.45 \pm 1.9) \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$ .

## 4.2 Trägheitsmoment aus physikalischem Pendel

Das Trägheitsmoment um die horizontale Achse kann auch aus dem Versuch mit dem physikalischen Pendel bestimmt werden. Dazu verwenden wir folgende Formel aus [4, S. 12]

$$\Theta_{\text{hor}} = \frac{m_{\text{Zus.-Gew}} \cdot g \cdot \tilde{d}_{\text{Zus.-Gew}} \cdot T^2}{4\pi^2} - m_{\text{Zus.-Gew}} \cdot \tilde{d}_{\text{Zus.-Gew}}^2, \quad (13)$$

wobei  $T$  die Schwingungsdauer des physikalischen Pendels ist. Mit  $\tilde{d}_k$  bezeichnen wir den Abstand zwischen dem Schwerpunkt eines Körpers  $k$  und der horizontalen Rotationsachse. Gemessen wurden jeweils 10 Schwingungsdauern in Sekunden von 18.82, 18.82, 18.25, 18.25, 18.85, 18.37, jeweils mit einer Genauigkeit von 0.25 s. Daraus ergibt sich als arithmetische Mittel  $T = 1.856 \pm 0.008$  s. Die Größen  $T$  und  $\tilde{d}_{\text{Zus.-Gew}}$  sind fehlerbehaftet. Der Fehler für  $\Theta_{\text{hor}}$  ergibt sich aus der gaußschen Fehlerfortpflanzung daher als

$$\begin{aligned} \sigma_{\Theta_{\text{hor}}}^2 &= \left[ \sigma_T \cdot \frac{m_{\text{Zus.-Gew}} \cdot g \cdot \tilde{d}_{\text{Zus.-Gew}} \cdot T}{2\pi^2} \right]^2 \\ &+ \sigma_{\tilde{d}_{\text{Zus.-Gew}}}^2 \cdot \left[ \frac{m_{\text{Zus.-Gew}} \cdot g \cdot T^2}{4\pi^2} - 2 \cdot m_{\text{Zus.-Gew}} \cdot \tilde{d}_{\text{Zus.-Gew}} \right]^2. \end{aligned}$$

$\tilde{d}_{\text{Zus.-Gew}}$  schätzen wir auf  $(12.25 + 2 \pm 0.5)$  cm. Die Masse des Zusatzgewichtes war 100 g. Einsetzen der konkreten Zahlenwerte führt zu  $\Theta_{\text{hor}} = (10.2 \pm 0.3) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

## 4.3 Präzessionsfrequenz

Beim Versuch zur Präzession wurden abwechselnd die Periodendauer der Präzession mit der Stoppuhr und die der Rotation der Scheibe mit der Lichtschranke gemessen. Zur Auswertung betrachten wir jede Präzessionsmessung als Messpunkt. Die dortige Rotationsfrequenz errechnen wir als Mittelwert der Messung vorher und nachher. Wir bezeichnen mit  $\omega_p$  die Präzessionsfrequenz und mit  $\omega_r$  die Rotationsfrequenz der Scheibe.

Die Rotationsfrequenz berechnen wir aus der Rotationsperiodendauer  $T_r$ , die wir mit der Lichtschranke gemessen haben. Dabei gilt

$$\omega_r = \frac{2\pi}{T_r}, \quad \frac{1}{\omega_r} = \frac{T_r}{2\pi}, \quad \sigma_{\omega_r^{-1}} = \frac{\sigma_{T_r}}{2\pi}. \quad (14)$$

Hierbei ist  $\sigma_{T_r} = 5$  ms die Hälfte des kleinsten Skalenteils der Lichtschranke.

Die Präzessionsfrequenz berechnen wir aus der gemessenen halben Präzessionsperiodendauer  $T_p$ . Für deren Fehler gilt dann

$$\frac{1}{2}\sigma_{T_p} = \sigma_{T_p/2} = \text{kleinster Skalenteil der Stoppuhr} + 0.005 \cdot \frac{T_p}{2}. \quad (15)$$

Also ist

$$\sigma_{T_p} = 0.02 + 0.005 \cdot T_p. \quad (16)$$

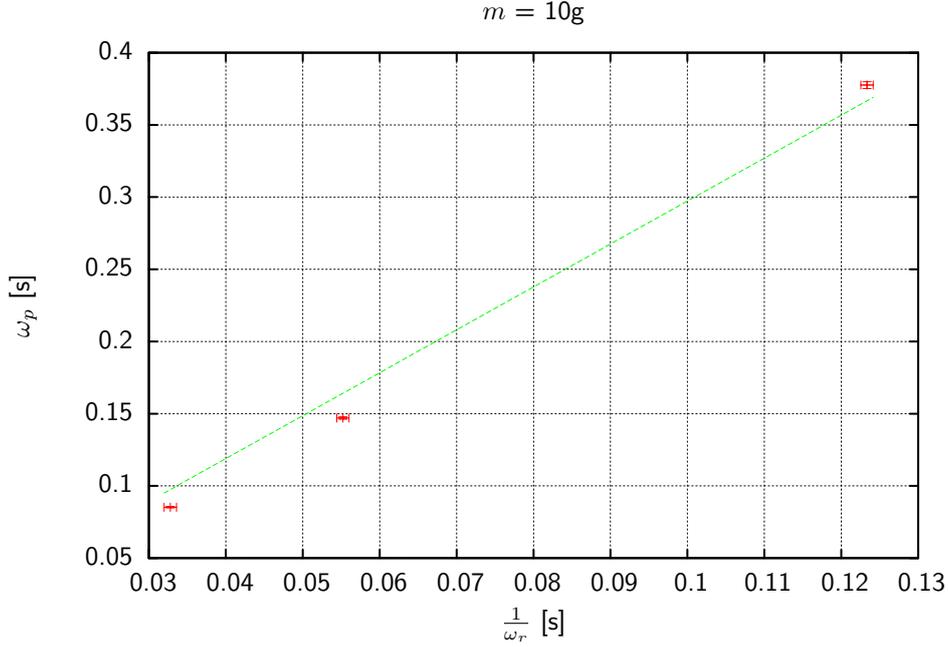


Abbildung 3: Ergebnisse für die Messung der Kreiselpräzession bei 10g Zusatzgewicht. Es ist ein proportionaler Zusammenhang erkennbar.

Es folgt

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}, \quad \sigma_{\omega_p} = \sigma_{T_p} \cdot \frac{2\pi}{T_p^2}. \quad (17)$$

Bei der letzten Messung haben wir die Rotationsfrequenz nicht noch einmal gemessen, da die Praktikumsanleitung diesbezüglich nicht eindeutig war. Dort nehmen wir also jeweils nur den einen Wert für die Rotationsfrequenz. Damit erhalten wir die in Abb. dargestellten Ergebnisse.

Zur Bestimmung des horizontalen Trägheitsmomentes aus der Präzessionsfrequenz stellen wir Gl. nach  $\Theta$  um und erhalten

$$\Theta_{\text{hor}} = \frac{d_{\text{Zusatz.-Gew}} \cdot m_{\text{Zusatz.-Gew}} \cdot g}{\omega_p \cdot \omega_r}. \quad (18)$$

Wir definieren  $\Omega := \omega_p \cdot \omega_r$ . Der Wert für jede der Massen ergibt sich durch Regression nach dem  $\chi^2$ -Verfahren in **gnuplot** mit der Funktion  $\omega_p(\frac{1}{\omega_r}) = \Omega \cdot \frac{1}{\omega_r}$ .

Den Fehler für  $\Theta_{\text{hor}}$  erhalten wir nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung.

$$\sigma_{\Theta_{\text{hor}}}^2 = \left[ \sigma_{d_{\text{Zusatz.-Gew}}} \cdot \frac{m_{\text{Zusatz.-Gew}} \cdot g}{\Omega} \right]^2 + \left[ \sigma_{\Omega} \cdot \frac{d_{\text{Zusatz.-Gew}} \cdot m_{\text{Zusatz.-Gew}} \cdot g}{\Omega^2} \right]^2 \quad (19)$$

Die Ergebnisse für die verschiedenen Massen sind in Abb. 3, 4 und 5 dargestellt. Für die Messung mit 10 g erhalten wir einen Wert für  $\Omega$  von  $2.97 \pm 0.12 \frac{1}{\text{s}^2}$ . Für die Messung

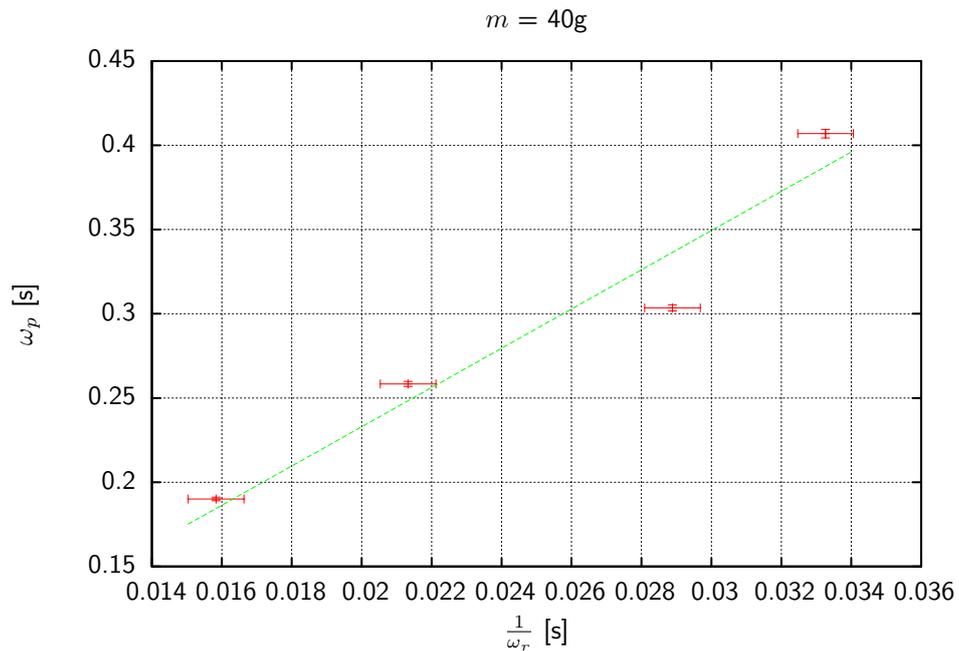


Abbildung 4: Ergebnisse für die Messung der Kreiselpräzession bei 40g Zusatzgewicht. Es ist ein proportionaler Zusammenhang erkennbar.

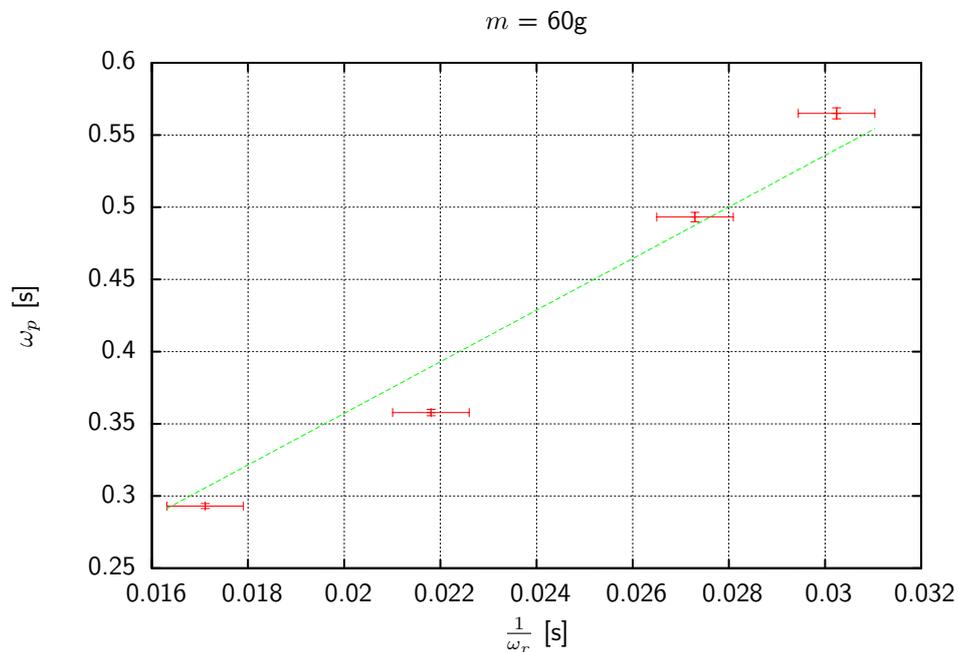


Abbildung 5: Ergebnisse für die Messung der Kreiselpräzession bei 60g Zusatzgewicht. Es ist ein proportionaler Zusammenhang erkennbar.

$m_{\text{Zusatz.-Gew}}$ in g	$\Theta_{\text{hor}}$ in $10^{-3}\text{kg} \cdot \text{m}^2$
10	$(8.5 \pm 0.4)$
40	$(8.8 \pm 0.4)$
60	$(8.5 \pm 0.3)$

Tabelle 1: Ergebnisse für die Bestimmung des horizontalen Trägheitsmomentes aus der Präzessionsfrequenz.

mit 40 g erhalten wir einen Wert für  $\Omega$  von  $11.6 \pm 0.5 \frac{1}{\text{s}^2}$ . Für die Messung mit 60 g erhalten wir einen Wert für  $\Omega$  von  $17.9 \pm 0.5 \frac{1}{\text{s}^2}$ . Der Wert für  $d_{\text{Zusatz.-Gew}}$  war  $(25.9 \pm 0.3)$  cm. Für  $\Theta_{\text{hor}}$  erhalten wir die in Tabelle 1 dargestellten Werte.

Daraus ergibt sich nach der folgenden Gleichung

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (20)$$

ein Mittelwert von  $(8.6 \pm 0.2) \cdot 10^{-3}\text{kg} \cdot \text{m}^2$ .

## 4.4 Nutationsfrequenz

Die Messdaten für die Nutation werden analog zu den Daten für die Präzessionsfrequenz ausgewertet. Wir erhalten so das in Abb. 6 dargestellte Diagramm und einen Wert für die Proportionalitätskonstante von  $k = (0.16 \pm 0.04) = \frac{\omega_N}{\omega_r}$ .

Nach Gleichung () ist dieses Verhältnis gleich dem Verhältnis der Trägheitsmomente zueinander:

$$\frac{\Theta_{\text{hor}}}{\Theta_{\text{vert}}} = \frac{\omega_N}{\omega_r}. \quad (21)$$

Damit können wir jetzt z.B. aus  $\Theta_{\text{hor}}$  das vertikale Trägheitsmoment berechnen

$$\Theta_{\text{vert}} = \frac{\Theta_{\text{hor}}}{k}, \quad \sigma_{\Theta_{\text{vert}}}^2 = \left[ \frac{\sigma_{\Theta_{\text{hor}}}}{k} \right]^2 + \left[ \sigma_k \frac{\Theta_{\text{hor}}}{k^2} \right]^2 \quad (22)$$

Nehmen wir den Wert für  $\Theta_{\text{hor}}$  aus der obigen Auswertung von  $(8.6 \pm 0.2) \cdot 10^{-3}\text{kg} \cdot \text{m}^2$  folgt daraus  $\Theta_{\text{vert}} = (54 \pm 14) \cdot 10^{-3}\text{kg} \cdot \text{m}^2$ .

## 5 Diskussion

Wesentliche Fehlerquellen bei den Versuchen waren Folgende:

- Bei der Bestimmung des Trägheitsmomentes aus den Abmessungen war es leider nicht möglich, die Masse der Stange zu messen. Ansonsten hätte sie in die Berechnung des Trägheitsmomentes mit einfließen können.

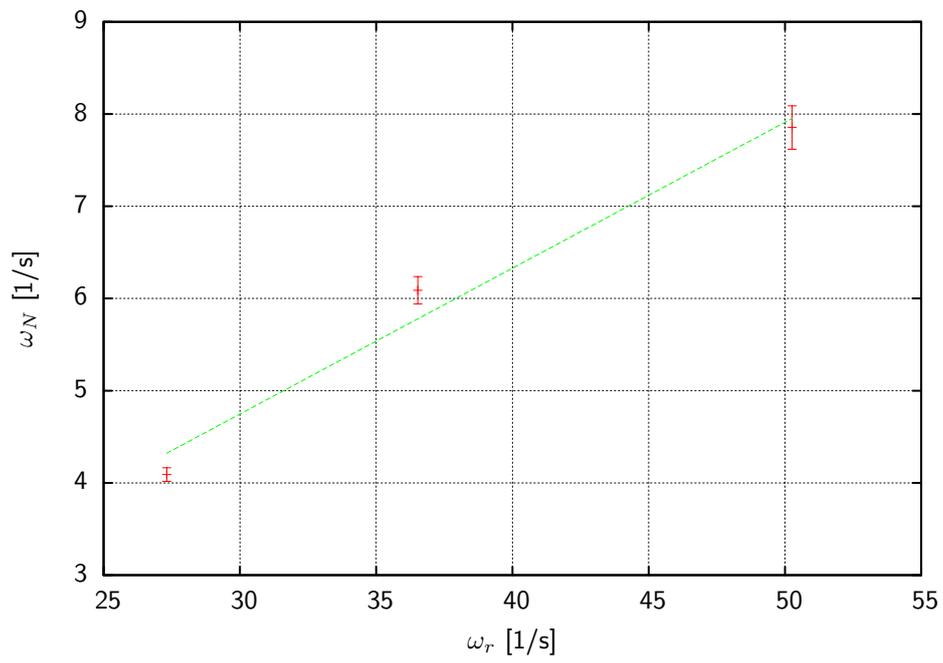


Abbildung 6: Ergebnisse für die Messung der Nutation. Es ist ein proportionaler Zusammenhang erkennbar.

	Abmessungen	physikalisches Pendel	Präzession	Nutation
$\Theta_{\text{hor}}$	9.93	$10.2 \pm 0.3$	$8.6 \pm 0.2$	-
$\Theta_{\text{vert}}$	$51.45 \pm 1.9$	-	-	$54 \pm 14$

Tabelle 2: Übersicht über die verschiedenen im Versuch bestimmten Trägheitsmomente. Alle Werte in  $10^{-3}\text{kg} \cdot \text{m}^2$ .

- Ein weitere Ungenauigkeit in der theoretischen Bestimmung der Trägheitsmomente besteht in der Näherung des Ausgleichsgewichtes als Punktmasse. Insgesamt ist also davon auszugehen, dass die Fehler in den Trägheitsmomenten aus den Abmessungen größer ist als der für diese Größen errechnete Fehler.
- Beim Versuch der Kreiselpräzession war es schwer, einen halben Umlauf abzuschätzen, da es an der entsprechenden Achse keine Skala gab.
- Eine weitere Fehlerquelle bei diesem Versuch dürfte die Reibung sein, die vor allem bei kleinen Massen trotz schneller Anfangsgeschwindigkeit im Zeitintervall der Messung deutlich auftrat.
- Beim Versuch zur Nutation war die Messung der Nutationsperiodendauer relativ schwierig, weil mit Augenmaß geschätzt werden musste, wann der Kreisel 5 Perioden durchlaufen hat. Die Ungenauigkeit dieser Messung könnte also ebenfalls größer sein als der für die Genauigkeit der Stoppuhr errechnete Wert.

Die erhaltenen Ergebnisse sind aber trotz dieser Fehler im Rahmen der Messgenauigkeit recht konsistent. Eine Übersicht über die verschiedenen Ergebnisse ist in Tab. 2 dargestellt. Der relative Fehler zwischen dem Wert für  $\Theta_{\text{hor}}$  aus den Abmessungen und dem physikalischen Pendel bzw. der Präzession beträgt 3 bzw. 16 %. Der relative Fehler zwischen dem Wert für  $\Theta_{\text{vert}}$  aus den Abmessungen und der Nutation beträgt 5 %.

## Literatur

- [1] DIETER MESCHÉDE (2010): *Gerthsen Physik*, 24. Auflage, Springer Heidelberg Dordrecht London New York
- [2] WOLFGANG DEMTRÖDER (2008): *Experimentalphysik I: Mechanik und Wärme*, 5. Auflage, Springer Berlin Heidelberg
- [3] WOLFGANG NOLTING (2011): *Grundkurs Theoretische Physik 1: Klassische Mechanik*, 9. Auflage, Springer Heidelberg Dordrecht London New York
- [4] LARS BRINKSCHMIDT, FABIAN HEIMANN (2013): *Versuch 3: Das Trägheitsmoment*, Protokoll zum Physikalischen Anfängerpraktikum