Versuch 6:
Spezifische Wärme der Luft und Gasthermometer

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **3**

2 Theorie **3**
- 2.1 Temperatur . . . 3
- 2.2 Die Allgemeine Gasgleichung . . . 3
- 2.3 Freiheitsgrade . . . 4
- 2.4 Innere Energie des idealen Gases . . . 4
- 2.5 Wärmekapazität . . . 4
- 2.6 Energie eines Kondensators . . . 5

3 Durchführung **6**
- 3.1 Gasthermometer . . . 6
- 3.2 Spezifische Wärme der Luft . . . 6

4 Auswertung **8**
- 4.1 Gasthermometer . . . 8
- 4.2 Spezifische Wärme der Luft . . . 10

Praktikanten:
Fabian Heimann,
Lars Niklas Brinkschmidt

Durchführung:
30.05.2013

1 Einführung

Dieser Versuch ist in zwei Teile gegliedert und dient zum einen zur Bestimmung des absoluten Temperaturnullpunkt, zum anderen zur Bestimmung der spezifischen Wärmekonstante der Luft.
Im ersten Versuchsteil wird die Druck eines Gases in Abhängigkeit von der Temperatur gemessen, wodurch mit linearer Regression der Temperaturnullpunkt bestimmt werden kann. Im zweiten Versuchsteil wird einem Gasgemisch eine bestimmte Menge Energie zugeführt, und dann die Druckänderung gemessen, wodurch dann die spezifische Wärmekonstante bestimmt werden kann.

2 Theorie

2.1 Temperatur

Die Temperatur ist die mittlere kinetische Energie der Moleküle, also

$$E = \frac{1}{2}m\left|\vec{v}^2\right| = \frac{3}{2}k_B T$$

wobei $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}}$ die Boltzmannkonstante ist.
Aus dieser Definition ersichtlich ist, dass es einen Minimalwert für die Temperatur gibt, der nicht unterschritten werden kann. Dieser ist erreicht, wenn die Moleküle keine Geschwindigkeit mehr haben, also $|\vec{v}^2| = 0$. Dieser absolute Nullpunkt liegt bei -273,15°C.
Dieser absolute Nullpunkt ist der Nullpunkt der Temperaturskala nach Kelvin. Wobei gilt:

$$|1|^\circ\,\text{C} = |1|^\circ\,\text{K} \quad \text{und} \quad x^\circ\text{C} = (x + 273,15)^\circ\,\text{K}$$

2.2 Die Allgemeine Gasgleichung

Eine Gasmasse M mit Volumen V steht unter dem Einfluss von Druck p und Temperatur T und ist durch diese Größen vollständig beschrieben. Die Gesetze von Boyle-Mariotte, Gay Lussac und Charles liefern

$$p \sim \frac{1}{V} \quad \text{bei } T \text{ konstant}$$

$$p \sim T \quad \text{bei } V \text{ konstant}$$

$$V \sim T \quad \text{bei } p \text{ konstant}$$

Diese Gesetze gelten für ideale Gase, das heißt es wird angenommen, dass die Teilchen des Gases keine Kräfte aufeinander ausüben und kein Eigenvolumen haben. Aus diesen Gesetzen folgt dann die Zustandsgleichung

$$p \cdot V = N \cdot k_b \cdot T.$$

Drückt man die Teilchenzahl nun in mol aus, mit $n = N/N_A$ mit $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{\text{Teilchen}}{\text{mol}}$ und definiert $R = N_A \cdot k_b = 8,31\, J/K\, mol$ so erhält man

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Die Gesetze von Boyle-Mariotte und Gay Lussac liefern außerdem Funktionenen der Abhängigkeit von Druck bei konstantem Volumen und Volumen bei konstantem Druck zur Temperatur. Für den Druck:

$$p = p_0(1 + \beta\vartheta) \tag{1}$$

und für das Volumen:

$$V = V_0(1 + \beta\vartheta)$$

mit $\beta = 1/273\, K$ und der Temperatur ϑ in $°C$.

2.3 Freiheitsgrade

Die Freiheitsgrade eines Gasmoleküls setzten sich aus den Freiheitsgraden der Translation und Rotation zusammen. Ein einatomiges Molekül, wie Argon besitzt nur drei Freiheitsgrade, die Freiheitsgrade der Translation. Für symmetrische Moleküle wie H_2 existieren die drei Freiheitsgrade der Translation sowie zwei weitere Freiheitsgrade der Rotation. Ein nicht symmetrisches Molekül wie H_2O besitzt also die maximal möglichen 6 Freiheitsgrade, 3 der Rotation, 3 der Translation.

2.4 Innere Energie des idealen Gases

Die innere Energie eines idealen Gases ist ausschließlich in der Bewegungsenergie seiner Moleküle. Auf jeden Freiheitsgrad entällt nun die Energie

$$U = \frac{1}{2} k_b T.$$

Für ein Molekül mit f Freiheitsgraden gilt also

$$U = \frac{f}{2} k_b T$$

und für ein Gas mit N Molekülen mit f Freiheitsgraden also

$$U = \frac{f}{2} N k_b T = \frac{f}{2} n R T. \tag{2}$$

2.5 Wärmekapazität

Der erste Hauptsatz der Wärmelehre sagt aus, dass eine Änderung der inneren Energie $\mathrm{d}U$ die Summe aus der Änderung der Wärmeenergie $\mathrm{d}Q$ und der mechanischen Energie $\mathrm{d}W$, der Änderung des Volumen, ist.

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q + \mathrm{d}W$$

Bei konstanter Temperatur, also $\mathrm{d}Q = 0$ gilt

$$\mathrm{d}U \;=\; \mathrm{d}W \;=\; -p \cdot \mathrm{d}V$$

und bei konstantem Volumen, wenn also keine mechanische Arbeit geleistet wird, und damit $\mathrm{d}W = 0$, gilt

$$\mathrm{d}U \;=\; \mathrm{d}Q$$

Um nun ein Gas um die Temperatur ΔT bei konstantem Volumen zu erhitzen, folgt nach 2 für die Energieänderung ΔU

$$\Delta U \;=\; \Delta Q \;=\; \frac{M}{m} \cdot \frac{f}{2} \cdot k_b \Delta T. \tag{3}$$

Die Wärmekapazität C_V des Körpers ist dann durch das Verhältnis

$$C_V \;=\; \frac{\Delta Q}{\Delta T} \;=\; \frac{Mf}{2m} k_b \qquad \left[\frac{J}{K}\right]$$

gegeben. Für die molare Wärmekapazität c_V, bezogen auf ein Mol des Stoffes, ergibt sich dann

$$c_V \;=\; \frac{C_V}{n} \;=\; \frac{Mf}{2mn} k_b \;=\; \frac{f}{2} \cdot R$$

Dies gilt jedoch nur bei konstantem Volumen. Bei konstantem Druck muss neben der Energie zur Wärmearbeit

$$c_V n \, \mathrm{d}T \;=\; \frac{f}{2} n R \, \mathrm{d}T$$

wird noch die mechansiche Arbeit zur Vergrößerung des Volumens

$$p \, \mathrm{d}V \;=\; n R \, \mathrm{d}T$$

geleistet werden. Insgesamt also:

$$(\mathrm{d}U)_p \;=\; c_p n \, \mathrm{d}T \;=\; \frac{f}{2} n R \, \mathrm{d}T + n R \, \mathrm{d}T \;=\; \left(\frac{f}{2} + 1\right) n R \, \mathrm{d}T$$

Daraus ergibt sich dann der Zusammenhang

$$c_p \;=\; c_V + R \;=\; \left(\frac{f}{2} + 1\right) R$$

2.6 Energie eines Kondensators

Wird ein Kondensator aufgeladen, wird eine Potentialdifferenz zwischen den Platten aufgebaut. Das heißt, dass positive Ladungen von der einen Platte auf die andere Platte geleitet werden müssen, dabei muss dem Kondensator Energie zugeführt werden. Für den Fluss einer kleinen Ladungsmenge $\mathrm{d}q$ gilt für die Energie, die zum Aufbau der Spannung benötigt wird

$$\mathrm{d}W \;=\; U \cdot \mathrm{d}q \;=\; \frac{q}{C} \cdot \mathrm{d}q.$$

Der Gesamtbetrag der potentiellen Energie W ergibt sich nun als Integral über dW vom Anfang $[q = 0]$ bis zum Ende $[q = Q]$ des Ladevorganges:

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_0^Q \frac{q}{C}\,\mathrm{d}q = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2.$$

Beim Entladen des Kondensators gibt dieser seine Energie W wieder ab.

3 Durchführung

3.1 Gasthermometer

Ein geschlossener, luftgefüllter Kolben befindet sich in einem Gefäß, gefüllt mit Wasser einer Temperatur von $0\,°C$. Die Druckdifferenz im Kolben zum Außendruck wird mit einem digitalen Druckdifferenzmessgerät aufgenommen. Der umgebende Luftdruck sollte vor dem Versuch mit Hilfe eines Barometers bestimmt werden. Der Glaskolben mit Eiswasser auf $0\,°C$ abgekühlt.Nun wird das Ventil des geöffnet. Das Druckmessgerät sollte nun ca. 0,00 kPa anzeigen. Das Ventil wird geschlossen, und das Wasserbad auf der Heizplatte unter rühren zum Kochen gebracht. Der Druck im Glaskolben wird in ca. $5\,°C$ großen Schritten in Abhängigkeit von der Temperatur notiert. Kocht das Wasser, wird die Heizplatte ausgeschaltet und das Wasserbad am Besten auf eine andere Unterlage gestellt. Nun wird das Wasserbad mit Eis auf $0\,°C$ abgekühlt. Wieder wird in ca. $5\,°C$ großen Schritten der jeweilige Druck im Gaskolben notiert.

3.2 Spezifische Wärme der Luft

Ein mit Luft gefüllter Zylinder ist an ein Wassermanometer angeschlossen. In dem Zylinder befindet sich ein dünner Metalldraht über den ein Kondensatur entladen wird. Somit kann eine bestimmte Wärmemenge an das Gas abgegeben werden. Vernachlässigt man die Veränderung des Luftvolumens, so lässt sich der von der Luft ausgeübte Druck am Wassermanometer ablesen.
Zuerst sollte der umgebende Luftdruck mit Hilfe eines Barometers bestimmt werden. Nun wird die Skala des Manometers auf Null gesetzt. Der Kondensator wird mit Spannungen zwischen 100 und $500\,V$ geladen und die Belüftungsöffnung des Zylinders mit dem Finger verschlossen. Jetzt wird der der Kondensator entladen, und der Ausschlag des Manometers gemessen. Zwischen den Messungen sollte die Luft im Zylinder genügend Zeit haben, um sich wieder abzukühlen. Hierzu wird der Finger von der Belüftungsöffnung entfernt. Der Ausschlag des Manometers sollte für möglichst viele Spannungen mehrfach gemessen werden. Zum Schluss wird noch das Volumen des Zylinders gemessen.

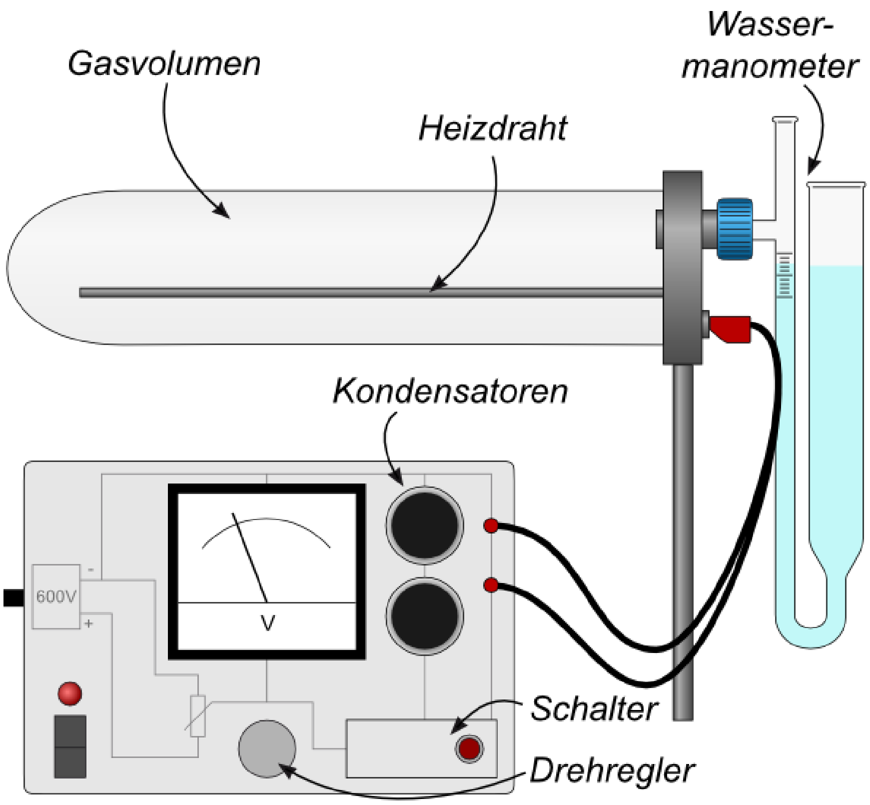

Abbildung 1: Schema des Versuchsaufbaus. Durch Entladung des Kondensators gibt der Heizdraht Wärme an die Luft, die sich erwärmt, wodurch sich der Druck erhöht, und die Differenz am Manometer abelesen werden kann

4 Auswertung

4.1 Gasthermometer

Um aus den gemessenen Druckdifferenzen den absoluten Temperaturnullpunkt zu bestimmen, benötigen wir neben den Messdaten den Wert für den Umgebungsdruck. Da in der Praktikumsanleitung nicht stand, dass dieser gemessen werden soll, haben wir ihn nicht gemessen. Wir nehmen daher für den Raumdruck einen Wert von $p_0 = 101.3$ kPa an [1, S. 106].

Den Druck erhalten wir dann als

$$p = p_0 + \Delta p, \tag{4}$$

wobei Δp der Druck ist, den wir am Messgerät abgelesen haben. Nun führen wir eine lineare Regression durch:

$$p(T) = a \cdot T + b. \tag{5}$$

Die Werte für a, b lassen sich dann in den absoluten Temperaturnullpunkt umrechnen (siehe Gleichung 1).

Erwärmen Für das Erwärmen erhalten wir folgende Regressionsgerade:

$$p(T) = (0.3422 \pm 0.0015)\frac{\mathrm{kPa}}{^\circ\mathrm{C}} \cdot T + (101.25 \pm 0.09)\mathrm{kPa} \tag{6}$$

Der Graph dazu ist in Abb. 2 dargestellt. Der absolute Temperaturnullpunkt ergibt sich als

$$T = -\frac{b}{a}. \tag{7}$$

Nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung ist

$$\sigma_T^2 = \left[\frac{\sigma_b}{a}\right]^2 + \left[\sigma_a \cdot \frac{b}{a^2}\right]^2. \tag{8}$$

Wir erhalten hier $T = -(296 \pm 2)$ °C.

Abkühlen Fürs Abkühlen führen wir die Auswertung analog durch und erhalten folgende Regressionsgerade:

$$p(T) = (0.343 \pm 0.003)\frac{\mathrm{kPa}}{^\circ\mathrm{C}} \cdot T + (101.7 \pm 0.2)\mathrm{kPa}. \tag{9}$$

Der Graph dazu ist in Abb. 3 dargestellt.

Wir erhalten für den Temperaturnullpunkt $T = -(297 \pm 2)$ °C.

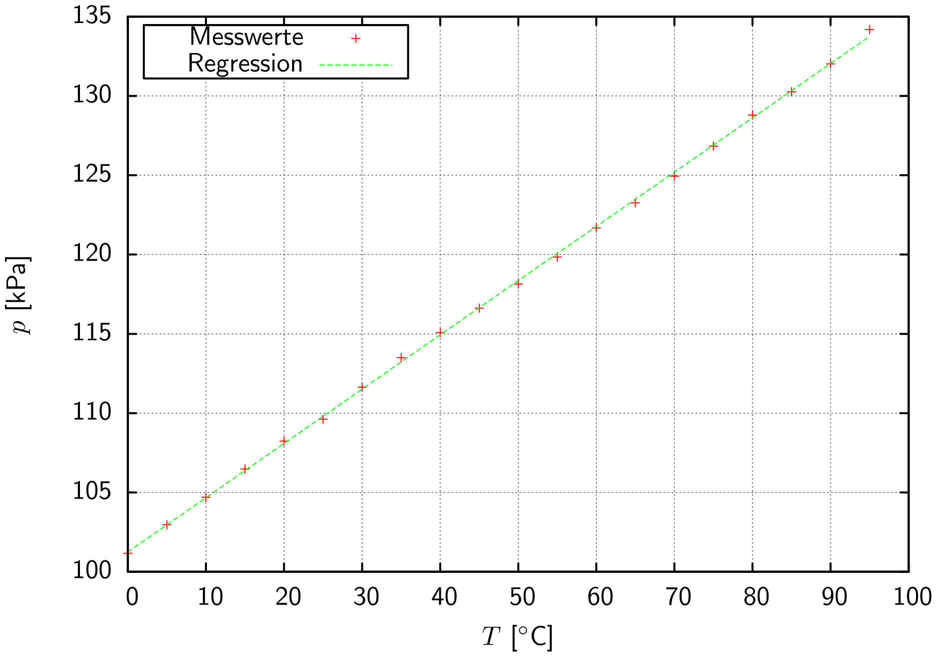

Abbildung 2: Ergebnisse für $p(T)$ beim Erwärmen

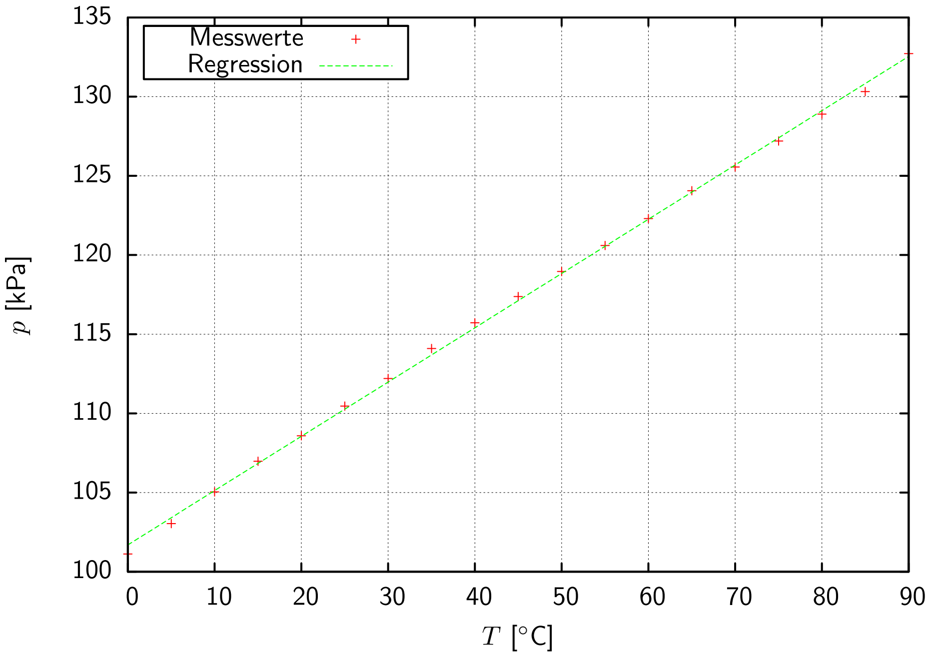

Abbildung 3: Ergebnisse für $p(T)$ beim Abkühlen

4.2 Spezifische Wärme der Luft

Als Erstes soll die Druckänderung Δp als Funktion der elektrischen Energie ΔQ aufgetragen werden. Aus dem Versuch erhalten wir die maximale Auslenkung des Manometers in Abhängigkeit von der Spannung am Kondensator.

Zur Umrechnung der Spannung U am Kondensator mit der Kapazität $C = 10\ \mu\text{F}$ in elektrische Energie verwenden wir folgende Formel

$$\Delta Q = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2. \tag{10}$$

Die Größe U ist nicht exakt bekannt. Wir wenden daher die Gaußsche Fehlerfortpflanzung an und erhalten

$$\sigma_{\Delta Q} = \sigma_U \cdot C \cdot U. \tag{11}$$

Nun soll noch die Druckänderung aus den maximalen Ausschlägen berechnet werden. Dazu wird als erstes ein Mittelwert der jeweils drei Messungen gebildet, wir erhalten so zu jeder Spannung (Energie) einen Wert für den maximalen Ausschlag inklusive Fehler.

Um die Druckänderung aus der maximalen Auslenkung h des Manometers zu bestimmen, folgt nach Gl. ()

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot h \cdot \left[1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right], \tag{12}$$

wobei $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$ die Dichte von Wasser und $g = 9.81\ \text{m/s}^2$ die Erdbeschleunigung bezeichnet. $r_1 = 2$ mm und $r_2 = 9.2$ mm sind die aus der Praktikumsanleitung gegebenen Radien der Schenkel des Manometers. Bezeichnen wir $1 + r_1^2/r_2^2$ mit α erhalten wir als Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_{\Delta_p} = \sigma_h \cdot \rho \cdot g \cdot \alpha \tag{13}$$

So erhalten wir den in Abb. 4 dargestellten Zusammenhang.

Anzahl der Freiheitsgrade Die Anzahl der Freiheitsgrade der Luft können wir nach folgender Formel aus den Messdaten bestimmen: (siehe 2.5)

$$f = 2 \cdot \frac{\Delta Q - p_0 \cdot \Delta V}{V \Delta p - p_0 \Delta V} \tag{14}$$

Dabei ist V das Volumen des Zylinders und ΔV seine Änderung durch den Ausschlag des Manometers. Es ergibt sich aus dem Aufbau des Manometers, dass

$$\Delta V = \pi \cdot r_1^2 \cdot h. \tag{15}$$

Nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung ist

$$\sigma_{\Delta V} = \pi \cdot r_1^2 \cdot \sigma_h. \tag{16}$$

Das Volumen des Zylinders V ergibt sich aus seinen Abmessungen:

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot H = \pi \cdot (0.045\ \text{m})^2 \cdot 0.4\ \text{m} = 2.54 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 \tag{17}$$

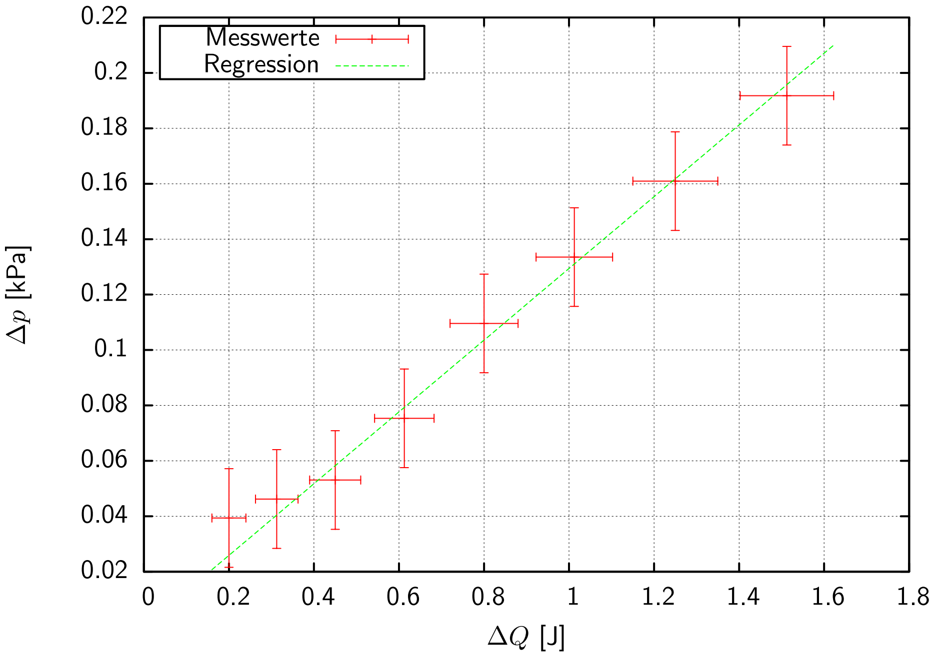

Abbildung 4: Auswertung der Druckänderung abhängig von der elektrischen Energie

Damit können wir für jeden Messpunkt in Diagramm 4 einen Wert für f bestimmen. Für den Fehler gilt nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_f^2 = \left[\sigma_{\Delta V} \cdot \frac{2p_0(\Delta Q - \Delta V)}{(V\Delta p - p_0 \Delta V)^2}\right]^2 + \left[\sigma_{\Delta p} \cdot \frac{2V(\Delta Q - \Delta V)}{(V\Delta p - p_0 \Delta V)^2}\right]^2 \tag{18}$$

Wir erhalten so die in Abb. 5 dargestellten Werte für f. Als gewichteter Mittelwert ergibt sich aus den Formeln

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{19}$$

zu $f = 6.2 \pm 0.5$.

Molwärme von Luft Es gilt die Gleichung

$$c_v = \frac{f}{2} \cdot R. \tag{20}$$

Dabei bezeichnet R die universelle Gaskonstante. Daraus ergibt sich eine einfache Fehlerdarstellung:

$$\sigma_{c_v} = \frac{\sigma_f}{2} \cdot R. \tag{21}$$

Wir erhalten damit einen Wert von $c_v = (26 \pm 2)$ J mol^{-1} K^{-1}.

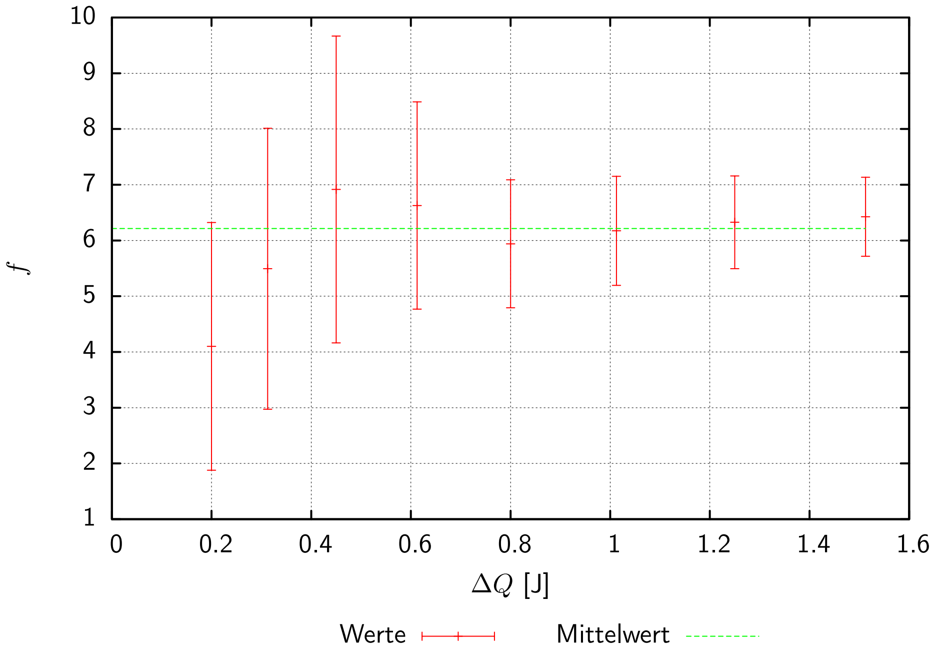

Abbildung 5: Ergebnisse für die Auswertung von f

Literatur

[1] Dieter Meschede (2010): *Gerthsen Physik*, 24. Auflage, Springer Heidelberg Dordrecht London New York