GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

Computergestütztes wissenschaftliches Rechnen: 2. Teilmodul

Hausarbeit

Projekt 75:	Anharmonische Schwingung
Bearbeiter:	Christian Gaß
Matrikelnummer:	21201049
Abgabetermin:	09.10.2013

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung 1

2 Runge-Kutta-Algorithmus 4. Ordnung 2

3 Freie harmonische und freie anharmonische Schwingung 2

4 Zusammenhang von Oszillationsperiode und Auslenkung bei freien Schwingungen verschiedener Anharmonizität 3

5 Periodisch angetriebene harmonische Schwingungen 4

6 Periodisch angetriebene anharmonische Schwingungen 6

1 Aufgabenstellung

In dieser Arbeit soll eine anharmonische Schwingung mit periodischem Antrieb unter Vernachlässigung der Reibung simuliert werden. Diese genügt der Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) = -D \cdot |x(t)|^B \cdot \frac{x(t)}{|x(t)|} + C \cdot \cos(\omega t).$$

Dabei ist m die Masse des Oszillators, t die Zeit, $x(t)$ die zeitabhängige Auslenkung, D die Kopplungskonstante, B die Anharmonizität ($B = 1$ entspricht einer harmonischen Schwingung), C die Stärke der antreibenden Kraft und ω deren Kreisfrequenz. Diese Differentialgleichung soll mit dem ***Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung*** numerisch integriert werden germäß den Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = v(t) \qquad \text{und} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{D}{m} \cdot |x(t)|^B \cdot \frac{x(t)}{|x(t)|} + \frac{C}{m} \cdot \cos(\omega t). \tag{2}$$

Die Anfangswerte $v(0)$ und $x(0)$ sowie die anderen Parameter werden über die Konsole eingegeben. Folgende Zusammenhänge werden untersucht:

- Eine freie, harmonische Schwingung über mehrere Perioden
- Eine freie, anharmonische Schwingung mit $B \geq 5$
- Die Abhängigkeit der Periode von der Amplitude der Auslenkung für $B \to 0$, $B = 1$ und $B \geq 5$.
- Der zeitliche Verlauf von $x(t)$ für eine mit ihrer Resonanzfrequenz angetriebene harmonische Schwingung und für $\omega = \frac{11}{10}\sqrt{\frac{D}{m}}$.
- Der zeitliche Verlauf für $x(t)$ für nahe der Resonanzfrequenz angetriebene anharmonische Schwingungen mit unterschiedlichen Anharmonizitäten.

Die benötigten Größen werden jeweils mit SI-Einheiten versehen. Diese können aber auch vernachlässigt werden, falls man eine rein mathhematische Betrachtung wünscht.

2 Runge-Kutta-Algorithmus 4. Ordnung

Das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung ist ein Verfahren zur numerischen Integration von Differentialgleichungen. Hat man eine DGL $y'(x) = F(y,x)$, so ist der Runge-Kutta-Algorithmus 4. Ordnung nach [1], S. 37, wie folgt aufgebaut:

$$y_{i+1} = y_i + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \mathcal{O}(\Delta x^5)$$

$$k_1 = \Delta x \cdot F(y_i, x_i)$$

$$k_2 = \Delta x \cdot F\left(y_i + \tfrac{k_1}{2}, x_i + \tfrac{\Delta x}{2}\right)$$

$$k_3 = \Delta x \cdot F\left(y_i + \tfrac{k_2}{2}, x_i + \tfrac{\Delta x}{2}\right)$$

$$k_4 = \Delta x \cdot F(y_i + k_3, x_i + \Delta x)$$

Hierbei ist Δx die gewählte Schrittweite. Der Fehler bei diesem Algorithmus liegt damit in der Größenordnung von Δx^5. Genauere Erklärungen über die Funktionsweise können der angegebenen Literatur entnommen werden.

3 Freie harmonische und freie anharmonische Schwingung

Eine freie Schwingung ist eine Schwingung ohne äußere, antreibende Kraft. Makroskopische freie Schwingungen sind üblicherweise gedämpft, d.h. aufgrund der Reibungskraft, die proportional zur Geschwindigkeit ist, klingen sie ab. Hier werden allerdings ungedämpfte freie Schwingungen betrachtet. In Gleichung 2 beschreibt der Term $\frac{C}{m} \cdot \cos(\omega t)$ die antreibende Beschleunigung. Diese kann „ausgeschaltet“ werden, indem man $C = 0$ N setzt. Für die harmonische Schwingung, d.h. für $B = 1$, erhalten wir die bekannte Differentialgleichung für eine ungedämpfte, harmonische Schwingung ohne Antrieb[1]:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m} \cdot x(t)$$

Für eine ungedämpfte, anharmonische Schwingung erhalten wir mit $B \neq 1$:

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m} \cdot |x(t)|^B \cdot \frac{x(t)}{|x(t)|}$$

In Abbildung 3 sind jeweils Simulationen für eine freie, harmonische und eine freie, anharmonische Schwingung aufgetragen. In Abbildung 3(a) wurden für die

[1]Um einen Überblick über verschiedene harmonische Schwingungen zu erhalten, kann beispielsweise [2], S. 172ff., herangezogen werden. Dort werden elektromagnetische Schwingungen behandelt. Für mechanische Schwingungen sei der erste Band dieser Reihe empfohlen.

harmonische Schwingung eine Schrittweite d$t = 0.01$ s und $n = 2500$ Iterationen gewählt, bei der anharmonischen eine Schrittweite d$t = 0.005$ s und $n = 5000$ Iterationen. Diese Schrittweiten sind sehr klein gewählt, was man sich aber leisten kann, da die Simulation relativ kurz ist. Folglich sind beide Simulationen recht genau. In Abbildung 3(b) wurden für beide eine relativ große Schrittweite d$t = 0.45$ s und $n = 300$ Iterationen gewählt. Ab etwa dieser Schrittweite versagt der Algorithmus für die anharmonische Schwingung bei etwa $t \leq 120$ s, was deutlich aus Abbildung 3(b) hervorgeht, nicht aber für die harmonische. Bei d$t \leq 0.2$ s hingegegen ist der Algorithmus auch für eine große Anzahl von Iterationen (getestet wurde mit $n = 100000$) auch für die anharmonische Schwingung stabil.

Die Unterschiede in der benötigten Schrittweite kann man sich wie folgt erklären. Für eine stark anharmonische Schwingung ist $x(t)$ zwischen den Extrema annähernd linear. Das wiederum bedeutet, dass $v(t)$ für diese linearen Abschnitte von $x(t)$ näherungsweise konstant ist. Sei diese konstante Geschwindigkeit v_0. Je größer die Anharmonizität ist, desto „spitzer“ sind weiterhin die Extrema von $x(t)$. Das bedeutet, dass die Geschwindigkeit bei den Extrema von $x(t)$ äußerst schnell ihr Vorzeichen wechselt und dann wieder fast konstant ist ($-v_0$). Diese rasche „Umpolung“ ist nun dafür verantwortlich, dass der Algorithmus bei relativ großen Schrittweiten deutlich versagt, während er bei der harmonischen Schwingung noch funktioniert. Denn bei der harmonischen Schwingung ist das Zeitintervall zwischen zwei Geschwindigkeitsmaxima in etwa doppelt so groß wie bei der anharmonischen (was daran liegt, dass der „konstante“ Teil bei großer Anharmonizität sehr ausgedehnt ist). Es gibt also zwischen den Extrema deutlich mehr Messpunkte. Weiterhin ändert sich die Steigung von $v(t)$ bei der harmonischen Schwingung fließend, bei der anharmonischen ändert sich diese schlagartig von nahezu 0 auf einen großen Wert. Das verursacht bei großen Schrittweiten auch große Fehler.

4 Zusammenhang von Oszillationsperiode und Auslenkung bei freien Schwingungen verschiedener Anharmonizität

In Abbildung 4 sind für verschiedene Anharmonizitäten jeweils eine Schwingung mit Amplitude $\hat{x} = 1$ m, $\hat{x} = 0.8$ m und $\hat{x} = 1.5$ m simuliert. Bei allen Simulationen wurden $n = 2500$ Iterationen und eine Schrittweite d$t = 0.01$ s verwendet. Wie bereits erklärt, arbeitet der verwendete Algorithmus bei dieser Schrittweite und den verwendeten Parametern sowohl für harmonische als auch für anharmonische Schwingungen zufriedenstellend. In Abb. 4(a) sind harmonische Schwingungen dargestellt, in Abb. 4(b) anharmonische mit $B = 2$, in Abb. 4(c) stark anharmonische mit $B = 5$ und in Abb. 4(d) Schwingungen mit $B = 0.001$.

Da in allen Simulationen $v(0) = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ gewählt wurde, entspricht die Anfangsauslenkung der Amplitude. Betrachten wir uns die harmonische Schwingung, so fällt auf, dass wie erwartet die Amplitude keine Rolle spielt für die Oszillationsperiode. Die drei Simulationen aus der Abbildung zeigen dies beispielhaft. Bei den anharmonischen Schwingungen spielt die Amplitude hingegen sehr wohl eine Rolle für die Oszillationsperiode. Aus den Abbildungen 4(b) und (c) wird ersichtlich, dass für Anharmonizitäten $B > 1$ die Periode mit steigender Amplitude abnimmt. Mit steigender Anharmonizität wird dieser Effekt umso größer: Bei der harmonischen Schwingung entsprechen 25 s fast genau vier Perioden. Bei einer Amplitude $\hat{x} = 1.5$ m entspricht diese Zeitdauer für $B = 2$ in etwa viereinhalb Perioden, für $B = 5$ mehr als sechseinhalb Perioden. Dieser Zusammenhang scheint nicht linear zu sein, denn für ansteigende $B = 2, 4, \ldots, 12$ verkürzt sich die Periode immer langsamer. Entsprechende Simulationen wurden durchgeführt, werden hier aber nicht abgebildet. Auch der Zusammenhang von Amplitude und Periode bei konstanter Anharmonizität scheint nicht linear zu sein: In Abb. 4(c) beispielsweise entsprechen 25 s bei $\hat{x} = 0.8$ m knapp zwei Perioden, bei $\hat{x} = 1$ m relativ genau 3 Perioden und bei $\hat{x} = 1.5$ m mehr als sechseinhalb Perioden. Bei konstant ansteigender Amplitude wurde eine immer geringerere absolute Abnahme der Periode beobachtet.

Abbildung 4(d) zeigt Schwingungen mit $B = 0.001$. Hier zeigt sich der umgekehrte Sachverhalt: Mit steigender Amplitude nimmt die Periode zu. Weiterhin ist auch hier der Zusammenhang von Amplitude und Periode nicht linear: Für $\hat{x} = 1, 2, \ldots, 7$ m wurde ersichtlich, dass bei konstant ansteigender Amplitude die abslute Vergößerung der Periode immer geringer wird. Diese Tatsache ist ansatzweise in Abbildung 4(d) zu erkennen. Auch hier existiert ein Zusammenhang zwischen Anharmonizität und Periode. Für $B \to 0$ scheint die Periode gegen einen festen Wert zu konvergieren, was aus mehreren Simulationen hervorging.

5 Periodisch angetriebene harmonische Schwingungen

In Abb. 1 sind zwei harmonische Schwingungen mit periodischen Antrieb abgebildet. Für beide wurde wie bisher die Schrittweite $\mathrm{d}t = 0.01$ s gewählt. Die Anzahl der Iterationen betrug $n = 18000$. Die sonstigen Parameter sind wie in der Bildunterschrift erklärt gewählt. Die rote Simulation beschreibt eine mit ihrer Eigenfrequenz $\omega_{res} = \sqrt{\frac{D}{m}}$ angetriebene harmonische Oszillation, die grüne eine mit der Kreisfrequenz $\omega = 1.1\,\omega_{res}$ angetriebene.

Antrieb mit $\omega = \omega_{res}$: Wie zu erwarten wird hier die Amplitude im zeitlichen Verlauf immer stärker. Dabei scheint mit den gewählten Parametern bei Anfangsauslenkungen $x(0) \leq C$ die Steigerung der Amplitude pro Periode immer gleich zu bleiben, was auch für andere C getestet wurde. Das heißt, die Verbindung der

Maxima scheint eine Gerade zu sein. Diese Gerade steigt auch bei doppelt so großen C doppelt so schnell an, was für $C = 1, 2, 4, \ldots, 32$ N getestet wurde. Für Anfangsauslenkungen, die größer sind als die Stärke der antreibenden Kraft, steigt die Verbindungskurve der Maxima zuerst geringer, aber immer steiler an, bevor sie wieder eine Gerade zu sein scheint. Eine Veränderung von m ändert auch die Resonanzfrequenz, weshalb für gleiche $\frac{C}{m}$ nicht unbedingt die gleiche Schwingung resultiert. Eine Veränderung von m hat also hier keine analoge Wirkung zur Variation von C.

Antrieb mit $\omega = 1.1\,\omega_{res}$: In Abb. 1 sieht man weiterhin sehr schön die bei harmonischen Schwingungen, welche in der Nähe ihrer Resonanzfrequenz angetrieben werden, entstehende Schwebung. Diese Schwebung wird für größere ω immer unerkennbarer. Je näher die Antriebsfrequenz an die Resonanzfrequenz rückt, desto größer wird die Periode, mit der die Amplitude variiert. Die maximale Amplitude scheint proportional zur Stärke C des Antriebs. Bei doppelt so großem C wird auch die maximale Amplitude doppelt so groß. Die Anfangsauslenkung spielt bei sonst gleichen Parametern nur eine untergeordnete Rolle: Die Differenz von kleinster und größter Amplitude der Schwebung bleibt scheinbar konstant, lediglich die Gesamtamplitude ändert sich um den Betrag, um den auch die Anfangsauslenkung verändert wurde. Ab ω mit $|\omega_{res} - \omega| \approx 10^{-4}$ berechnet der Algorithmus keine Schwebung mehr, sondern eine der Resonanz ähnliche Kurve.

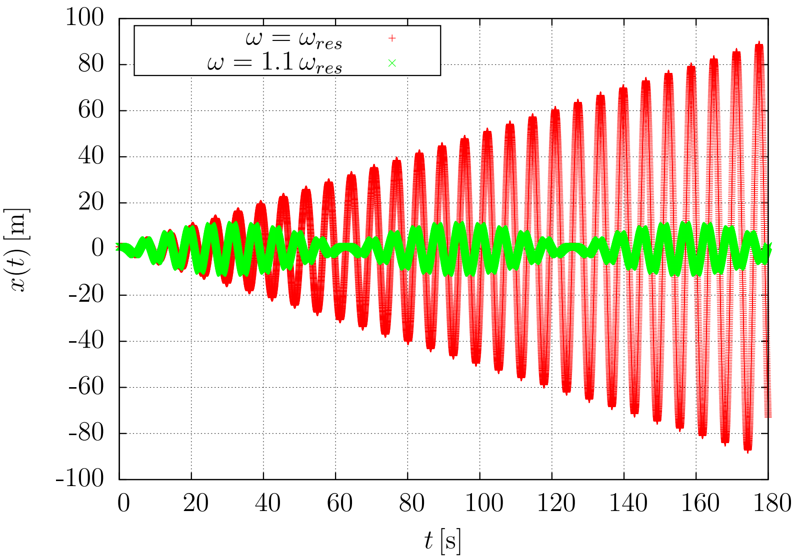

Abbildung 1: Periodisch angetriebene harmonische Schwingungen. Die Parameter wurden jeweils wie folgt gewählt: $x(0) = 1$ m, $v(0) = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $D = 1\ \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$, $C = 1$ N und $m = 1$ kg. Für die rote Simulation wurde die Frequenz ω des Antriebs mit $\omega = \omega_{res}$ gewählt, für die grüne Simulation mit $\omega = 1.1\,\omega_{res}$. ω_{res} bezeichnet die Resonanzfrequenz des Oszillators.

6 Periodisch angetriebene anharmonische Schwingungen

Abb. 2 zeigt nahe der Resonanzfrequenz angetriebene Schwingungen verschiedener Anharmonizität. Die bei harmonischen Schwingungen erwartete Schwebung ist in Abb. (a) noch deutlich zu erkennen, bei $B = 2$ in Abb. (b) nur noch vage. Für ansteigende Anharmonizitäten wird der Verlauf immer chaotischer. In (c) und (d) sind die Schwebungen nicht mehr ansatzweise zu erkennen. Die Schwebung in (a) hat jedoch eine deutlich geringere Periode (bzgl. der Amplitudenvariation) als die Schwebung aus Abb. 1, bei der die Schwingung harmonisch war, wobei die sonstigen Parameter gleich waren. Ein ähnliches Bild zeigt sich auch für $B \to 0$: Für nahe an 1 gelegene B ist die Schwebung deutlich zu erkennen. Für $B \to 0$ wird die Schwingung immer chaotischer. Für alle Simulationen in Abb. 2 wurden $n = 6000$ Iterationen und eine Schrittweite $\mathrm{d}t = 0.01$ s gewählt.

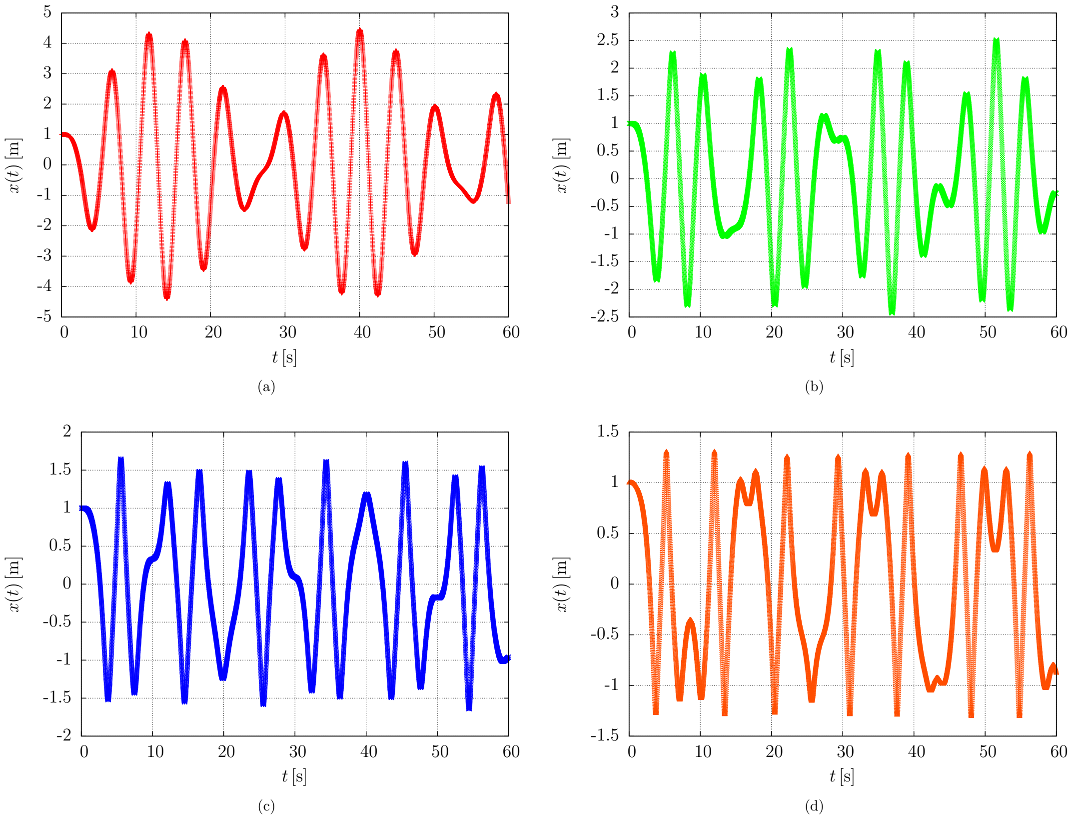

Abbildung 2: Schwingungen verschiedener Anharmonizitäten, angetrieben mit $\omega = 1.1\,\omega_{res}$. (a): $B = 1.5$; (b): $B = 2.5$; (c): $B = 5$; (d): $B = 12$. Sonstige Parameter sind $x(0) = 1$ m, $v(0) = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $C = 1$ N, $D = 1\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$ und $m = 1$ kg.